

海底边坡稳定性分析中波浪力的求解

胡涛骏¹, 叶银灿¹

(1. 国家海洋局 第二海洋研究所, 浙江 杭州 310012)

摘要:针对浅水区波浪的非线性特性, 提出了在海底边坡稳定性分析中应用椭圆余弦波理论来研究波浪力的问题, 利用非线性弥散关系建立了新的适用于整个水深范围的椭圆余弦波的近似求解方法. 结合工程实例, 确立了海底边坡波浪力的计算步骤, 并编制了计算程序.

关键词:边坡稳定性; 波浪力; 椭圆余弦波; 非线性弥散方程

中图分类号: TU457; P731.22

文献标识码: A

文章编号: 0253-4193(2007)06-0120-06

1 引言

波浪是除海底地震以外影响海底边坡稳定性的最主要的因素之一. 波浪对海底土体的作用力可以概括为波压力(包括静水压力和动水压力)以及由此产生的孔隙水压两类, 其中波浪的动水压力是求解海底边坡波浪力作用的关键. 波浪产生的动水压力, 通常简称为波浪力. 关于海底波浪力的求解方法和理论已有很多, 如线性波理论、斯托克斯波浪理论、椭圆余弦波理论^[1]等. 由于线性波理论表达简单, 且易于计算, 因此目前常利用它来求解海底的波浪力^[2].

波浪由深水传播至浅水后, 受到水深、海底地形等因素的影响, 波浪逐渐表现出非线性特性. 因此, 对于近岸浅水区而言, 用线性波理论求解波浪力实际上是不合适的. 目前对浅水区所用的非线性波浪理论主要有椭圆余弦波理论、双曲波理论和孤立波理论等, 而后两者实际上是前者的近似^[3]. 本文提出在海底边坡稳定性分析中应用椭圆余弦波理论研究波浪力问题, 并提出了新的适用于整个水深范围的椭圆余弦波的近似求解方法.

2 椭圆余弦波理论及其近似求解

2.1 椭圆余弦波理论

椭圆余弦波理论是最重要的浅水非线性波浪理论之一, 该理论首先由 Korteweg 和 De Vries 于 1895 年提出, 其后由 Keulegan 和 Patterson, Keller, Littman 等进一步研究并使之用于工程实践. 在这一理论中波浪的各种特性均以雅可比椭圆函数形式给出, 因此被命名为椭圆余弦波理论.

Keulegan 和 Patterson, Laitone 等曾给出了椭圆余弦波的一阶解, Laitone 和 Chappellear 分别得到了二阶和三阶解, 后来 Laitone 将所得二阶解形式进行了转化, 用于实际, 并比较了椭圆余弦波理论和斯托克斯高阶波理论. Le Mehaute 通过考虑波速的不同定义以及它们对波形和总传播速度的影响, 重新检验了椭圆余弦波的解. Fenton 给出了五阶解, 然而在得到任何解析解之前均需假设波速. 近年来 Tsuchiya 和 Yasuda 使用一种还原摄动法, 在不假设波速的情况下导出了椭圆余弦波的三阶解.

本文采用一阶椭圆余弦波公式计算了海底的波浪力 p_0 , 其主要表达式如下^[1]:

$$p_0 = \rho g \eta, \quad (1)$$

收稿日期: 2006-09-15; 修订日期: 2007-01-08.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40476032).

作者简介: 胡涛骏(1980—), 男, 浙江省宁波市人, 硕士, 从事海底边坡稳定性研究. E-mail: taojun.hu@gmail.com

$$\eta = y_s - h, \quad (2)$$

$$y_s = y_t + H \operatorname{cn}^2[2K(\kappa)(x/L - t/T), \kappa], \quad (3)$$

$$y_t = h - H + 16h^3 K(\kappa) [K(\kappa) - E(\kappa)] / 3L^2, \quad (4)$$

$$L \sqrt{3H/16h^3} = \kappa K(\kappa), \quad (5)$$

$$T \sqrt{g/h} = \sqrt{16h/3H} \kappa K(\kappa) / \sqrt{1 + [-1 + [2 - 3E(\kappa)/K(\kappa)]/\kappa^2]H/h}, \quad (6)$$

式中, y_s 为海底至波高的距离; y_t 为海底至波谷的距离; ρ 为海水密度; g 为重力加速度; h 为水深; H 为波高; L 为波长; T 为周期; cn 为雅可比椭圆余弦函数; $K(\kappa)$ 为第一类完全椭圆积分; κ 为椭圆积分的模, 其值为 $0 \sim 1$; $E(\kappa)$ 为第二类完全椭圆积分. 各种波浪要素见图 1.

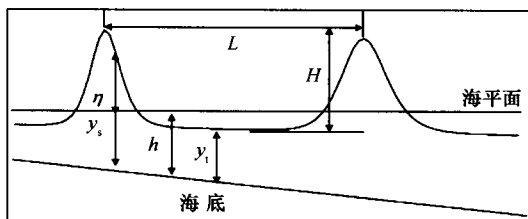


图 1 椭圆余弦波的要素定义

2.2 现有椭圆余弦波的求解方法

由于椭圆余弦波理论中包含了复杂的雅可比椭圆函数以及椭圆积分, 需要求解的有关各种量又交叉出现在不同的公式中, 必须经过不断地迭代才能得到结果, 因此求解椭圆余弦波十分复杂. 现有的椭圆余弦波求解方法主要有查图表分析法^[4]和数值计算法^[5~7]两大类.

利用 Wiegel^[4]绘制的一系列计算曲线, 无需复杂的计算就能得到不同波高、水深和周期所对应的椭圆余弦波的各项参数, 因此夏震寰^[8]推荐使用查图表分析法. 对于实际工程中遇到的海底边坡, 其水深、波高是沿坡面不断变化的, 如果使用此方法, 就必须对不同水深、波高点都进行查表分析, 这样需要花费大量的时间和精力, 而且此方法的精度也不是很高, 所以必须通过数值计算来求解海底边坡受到的椭圆余弦波的作用. 现有的数值计算方法主要有直接迭代法^[5]、Ursell 参数表示法^[6]和多项式展开法^[7], 而这些数值方法中又普遍存在以下问题:

- (1) 未考虑椭圆积分的模对计算结果的影响;
- (2) 未考虑波高和波长的变化;
- (3) 直接对方程(6)进行迭代, 不但计算量太大,

而且容易出现不收敛的情况.

本文提出的方法考虑了椭圆积分的模以及波高和波长变化的影响, 并通过程序设计对迭代过程进行了改进, 大大降低了在海底边坡稳定性分析时计算椭圆余弦波所需的时间.

2.3 考虑椭圆积分的模的影响

如前所述, 椭圆积分的模的取值为 $(0, 1)$. 由于第一、第二类完全椭圆积分以及雅可比椭圆余弦函数都取决于椭圆积分的模, 因此它对求解结果的影响很大, 必须保证它的精度. 图 2 为第一、第二类完全椭圆积分关于椭圆积分的模的曲线, 可以看出当椭圆积分的模趋近于 1 时, 第一类完全椭圆积分的值迅速增大, 而椭圆积分的模趋近于 0, 第一、第二类完全椭圆积分的值基本保持不变.

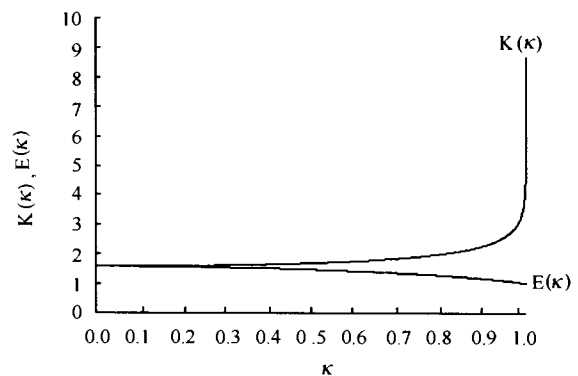


图 2 第一、第二类完全椭圆积分与椭圆积分的模的关系曲线

为了能更进一步了解椭圆积分的模对第一、第二类完全椭圆积分的影响, 分别在椭圆积分的模的不同取值范围内求解它们. 发现当椭圆积分的模趋向于 1 时, 要保证 1% 的精度, 它的取值精度必须为 $10^{-9} \sim 10^{-10}$; 当它趋向于 0 时, 它的变化对第一、第二类完全椭圆积分的影响非常小, 一般取 $10^{-2} \sim 10^{-3}$ 即能保证精度. 由此可见, 直接对式(5)进行迭代, 如果统一将椭圆积分的模的精度取到 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ 进行迭代, 虽然能保证精度, 但却要浪费很多时间, 一般来说它所需的迭代次数比分区间后要多出 10 万倍以上; 如果统一取 2~3 位有效数字, 则计算精度大大降低. 因此, 对它进行分区间考虑是很有必要的.

本文采用变步长勒让德-高斯求积法^[9]来计算不同椭圆积分的模所对应的第一、第二类完全椭圆积分, 在确保它们取得一定精度后划分它的精度区

间.假定第一、第二类完全椭圆积分的精度要求为 1%,则可以将它划分为以下步长区间:

$$\Delta \kappa = \begin{cases} 0.000\ 000\ 01, 0.999\ 995 < \kappa \leq 1, \\ 0.000\ 000\ 1, 0.999\ 995 < \kappa \leq 0.999\ 995, \\ 0.000\ 001, 0.999\ 5 < \kappa \leq 0.999\ 95, \\ 0.000\ 01, 0.995 < \kappa \leq 0.999\ 5, \\ 0.000\ 1, 0.95 < \kappa \leq 0.995, \\ 0.001, 0 < \kappa \leq 0.95. \end{cases}$$

在各个步长区间内按步长逐一进行积分求解第一、第二类完全椭圆积分,并建立它们与椭圆积分的模之间的数值对应关系.

2.4 考虑波高和波长的变化

在波浪由深水向浅水传播中,由于非线性影响,波长会逐渐变短,波高逐渐变大,因此在计算海底波浪力时必须首先考虑波高、波长的变化.邱大洪^[10]利用波能流守恒来求解不同水深的波高和波长,但是由于波能流的求解非常复杂,在工程实际应用中尚有困难.

考虑到波浪在浅水中的非线性特性,本文采用非线性弥散关系来计算浅水区的波高和波长.前人已经给出了多种非线性弥散关系,其中李瑞杰等^[11]对以往提出的非线性弥散关系进行了修正,使其适用于整个水深范围,因此本文直接由此关系式来推导整个海底边坡上的波长和波高.李瑞杰等^[11]的非线性弥散关系式如下:

$$\sigma^2 = gk[1 + \tanh^2(kh)\delta^2]\tanh(kh + \delta), \quad (7)$$

式中, σ 为角频率; k 为波数; $\delta = H/L$, 为波陡.由此可以导出如下公式:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}[1 + \tanh^2(kh)\delta^2]\tanh(kh + \delta), \quad (8)$$

$$c = \frac{gT}{2\pi}[1 + \tanh^2(kh)\delta^2]\tanh(kh + \delta). \quad (9)$$

当水深足够大时 $[1 + \tanh^2(kh)\delta^2]\tanh(kh + \delta)$ 趋向于 1, 得到深水波长 L_0 和波速 c_0 分别为

$$L_0 = gT^2/2\pi, \quad c_0 = gT/2\pi. \quad (10)$$

根据文献[1]中的波高在浅水域的变化公式

$H = H_0\sqrt{c_0/2(cn)}$, 且能量传递率 n 满足下列关系式:

$$n = \frac{1}{2} \frac{\sinh 2kh}{\sinh 2kh + 2kh}, \quad (11)$$

由此可以得到波高 H 与波长 L 的关系式

$$H = H_0 \sqrt{\frac{L_0 \sinh 2kh}{(\sinh 2kh + 2kh)L}}. \quad (12)$$

把式(12)代入式(8),通过迭代就可以得到不同水深所对应的波长,再代回到式(12)即可得到该点的波高值.

当水深进一步减小,波浪发生破碎后,式(12)已经不再满足波高的变化规律,此时可以利用文献[1]中提到的破碎后的波高公式进行求解.在破碎带内波浪破碎后发生能量损失,辐射应力沿程减小,引起增水现象.破碎后的波高可以近似表示为

$$H = \gamma(h + \bar{\eta}), \quad (13)$$

式中,参数 γ 通常取 0.8; $\bar{\eta}$ 由下式求解:

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}_b + K(h_b - h), \quad (14)$$

其中 $K = 1/(1 + 8/3\gamma^2)$; $\bar{\eta}_b = -H_b/20$; h_b 和 H_b 分别表示破碎点的水深和波高.破碎准则采用最具有代表性的合田公式^[12]:

$$\left(\frac{H}{h}\right)_b = \frac{L_0 A \{1 - \exp[-1.5\pi h_b/L_0(1 + 15\tan^{4/3}\theta)]\}}{h_b}, \quad (15)$$

式中, θ 为岸坡坡角; A 取 0.17. 这样,由式(15)确定波浪破碎点的位置后就可以用式(13)对破碎点以内的波高和波长进行修正,得到整个海底边坡上完整的波高和波长.

2.5 海底波压力的求解

在已知水深、波高和波长的情况下,利用式(5)可以确定对应的第一类和第二类完全椭圆积分.通常的数值计算方法是结合两类完全椭圆积分直接对该方程进行迭代,但是在分析波浪作用下海底边坡的稳定性时,为了尽量模拟边坡上的波浪力,必须在边坡上取大量的水深点,如果直接迭代,将重复很多同样的过程,浪费计算时间,这时就可以利用本文前面已经建立的椭圆积分的模与第一类和第二类完全椭圆积分的关系,直接对不同水深点进行匹配得到相应的计算参数.在整个计算过程中只需进行一次精度区间内的椭圆积分.

至此,计算海底波压力的所有参数已经确定.根据方程组(1)~(4),假定时间 $t = t_0$, x 为水深点的横坐标,依次代入各方程便可得到该时刻海底受到的一阶椭圆余弦波的波浪力.

由于椭圆余弦波是对浅水环境推导的,因此为使其应用于整个海底边坡上波浪力的计算,还必须对式(2)进行修正.在线性波理论中波压力的计算公式为

$$p = \frac{\rho g H}{2 \cosh kh} \cos(kx - \sigma), \quad (16)$$

对上述公式进行变形可以得到

$$p = \frac{\rho g \eta_0}{\cosh kh}, \quad (17)$$

式中, η_0 为线性波的波面函数. 图 3 为假定时间为 0 时不同水深范围内椭圆余弦波与线性波的波面曲线比较图, 可以发现, 当水深较大时两者基本一致, 因对深水条件, 式(17)中的 η_0 亦可以由椭圆余弦波波面函数 η 代替; 当水深较小时, $\cosh kh \approx 1$, 因此本文认为对整个水深范围内的海底波浪力可以由下式计算:

$$p = \frac{\rho g \eta}{\cosh kh} = \frac{\rho g}{\cosh kh} \times \{16h^3 K(\kappa) [K(\kappa) - E(\kappa)] / 3L^2 - H + H \operatorname{cn}^2[2K(\kappa)(x/L - t/T), \kappa]\}. \quad (18)$$

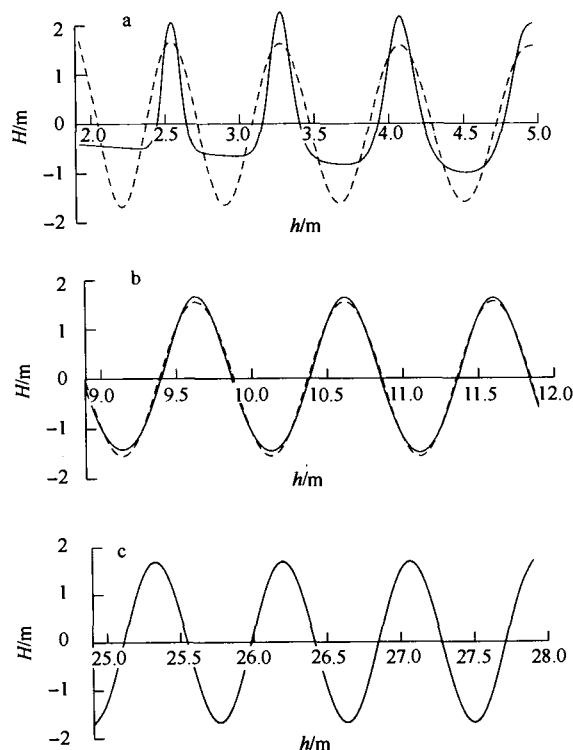


图 3 椭圆余弦波理论与线性波理论计算所得波形曲线比较

2.6 结果分析

为了验证本文建立的椭圆余弦波近似求解方法的精度, 分别用查表法、直接迭代法以及本文提出的方法来求解椭圆余弦波方程. 用查表法和直接迭代法计算所需参数主要包括水深、波高以及周期, 因此

假定海底边坡某点处的水深为 3 m, 周期为 15 s, 波高为 1 m, 求解过程省略, 得到的结果见表 1. 此外, 表 1 中还列出了用线性波理论计算得到的波长、波面高度及海底波浪力.

表 1 计算结果对照表

计算参数	线性波理论	椭圆余弦波理论		
		查表法	直接迭代法	本文方法
L/m	80.6	88.5	81.38	82.74
K	—	0.999 99	0.999 989 7	0.999 991 7
η	0.50	0.865	0.852 5	0.854 164
p_{\max}/kPa	4.87	8.65	8.52	8.31

从表 1 可以看出, 由于线性波理论未考虑波浪在浅水传播时的非线性特性, 因此得到的结果与椭圆余弦波的结果相差较大, 而用三种椭圆余弦波求解方法得到的结果基本一致.

3 工程应用

某石油公司拟新建一大型的原油码头, 由于该地区曾发生海底滑坡现象, 故对拟建码头海区进行了细致的海底边坡稳定性调查分析, 得到该地区的设计波高($H_{1\%}$)为 3.4 m, 周期为 4.9 s.

本文中选取码头区海底 L10 剖面进行波浪作用下的稳定性分析. 计算过程归纳如下:

(1) 以平均海平面与边坡的交点为原点, 建立边坡稳定性计算模型(图 4);

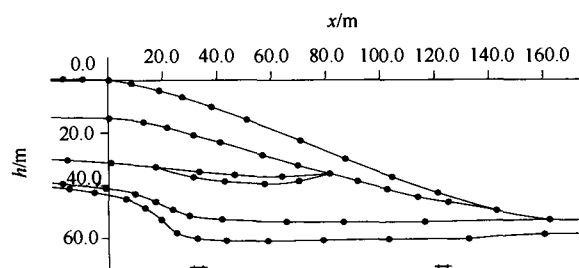


图 4 海底边坡的计算模型

(2) 在海底面上以一定的间距取点, 得到一系列水深点, 用于计算波浪力;

(3) 根据已知的深水区波高和波周期, 利用式(8)及(12)计算以上各点对应的波高和波长, 并用式(15)判断波浪破碎情况; 对于破碎带内的水深点, 用式(13)重新计算波高, 并代入式(8)对破碎后的波长进行修正;

(4)利用式(5)计算各点的椭圆积分的模和第一类完全椭圆积分,采用前面提到的匹配法来实现;

(5)假定时间 $t=t_0$,将得到的参数代入式(18)得到各点的波浪力;

(6)进行波浪作用下边坡稳定性分析计算.

本文把上述步骤编制了计算程序,这样对于其它海底边坡只需进行(1)、(2)两步就可以得到海底的波浪力,对于工程中需要计算大量剖面的情况具有很大的实际意义.

在计算波浪作用下海底边坡的安全系数时,通常的作法是直接假定时间等于 0,但本文认为这样的假定可能导致稳定性分析未在最大峰值波浪力下进行,从而得到安全系数比实际的稍大.为此本文在一个周期内分别取 5 个计算时间点进行了波浪作用下的海底边坡稳定性分析,计算结果见图 5.从该图可以看出,波浪力的作用使海底边坡的稳定性总体降低;在不同时刻,由于波浪的周期变化,边坡的安全系数亦呈现周期性的交替变化.本例中波浪作用下得到的海

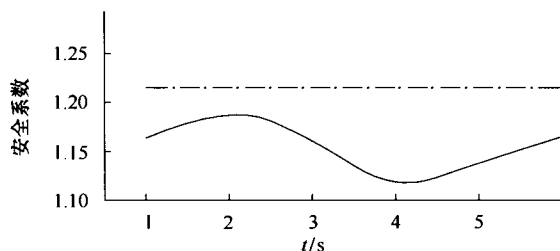


图 5 一个波周期内海底稳定性的变化

— · — 不考虑波浪力, — 考虑波浪力的作用

底边坡的最小安全系数为 1.119,相对于不考虑波浪力时的安全系数 1.217 小了 8.76%,更值得关注的是它与时间为 0 时得到的安全系数 1.163 相比也小了 3.93%.如果波浪较大,那么这些差值就可能更大,对计算结果的影响也更大,因此本文建议充分考虑不同时刻波浪力的作用,以便在最大峰值波浪力作用下分析计算海底边坡的稳定性.

4 小结

(1)本文提出用非线性的椭圆余弦波理论来求解海底波浪力,建立了适用于整个水深范围的新的一阶椭圆余弦波近似的计算方法,并编制了程序.将该方法应用于工程实例,总结了工程中分析波浪作用下海底边坡稳定性的一般步骤,得到了较好的结果.

(2)在推导椭圆余弦波计算方法时考虑了椭圆余弦波理论中椭圆积分的模对整个求解过程的影响,将其进行精度区间划分,在保证一定精度的前提下大大缩短了计算所需的时间.

(3)在求解海底波浪力时考虑了波浪在近岸传播过程中的能量损失,利用非线性弥散关系推导了海底水深对波高和波长的影响.

(4)在实例应用时分析了波浪传播对边坡稳定性的影响,提出在海底边坡稳定性分析时必须考虑不同时刻的波浪力.

(5)本文还总结了工程中分析波浪作用下海底边坡稳定性的一般步骤,具有一定的现实意义.

参考文献:

- [1] 吴宋仁,周华君,张庆河.海岸动力学[M].北京:人民交通出版社,2000.
- [2] 宋连清,叶银灿,陈锡土,等.岙山成品油码头海底边坡稳定性分析[J].东海海洋,1999,17(1):28-36.
- [3] 马汝建,贾忠红,刑惠利.浅海结构物波浪力计算及实验研究[J].中国海上油气(工程),1999,11(6):23-27.
- [4] WIEGEL R L. A presentation of cnoidal wave theory for practical application[J]. J Fluid Mech, 1960, 7: 273-286.
- [5] 董志明,黄惠钦,黄清哲.数值波浪水槽中 Cn 波之产生及其傳遞特性之研究[J].海洋工程學,2005,5(1):13-30.
- [6] 顾家龙,沈先荣.椭圆余弦波的数值计算及其特性研究[J].海洋工程,1989,1:30-40.
- [7] 李炎保.椭圆余弦波计算方法的改进[J].水运工程,1988,1:9-11.
- [8] 夏震寰.现代水力学(四):波浪理学[M].北京:高等教育出版社,1992.
- [9] 徐士良. Fortran 常用算法程序集[M].北京:清华大学出版社,1995.
- [10] 邱大洪.波浪理论及其在工程上的应用[M].北京:高等教育出版社,1985.
- [11] 李瑞杰,LEE Dong-Young,诸裕良.非线性弥散效应及其对波浪变形的影响[J].海洋工程,2001,19(4):46-51.
- [12] 李玉成.波浪在浅水区的变形及破碎[J].海洋学报,1997,19(3):111-118.

Calculation of the wave force for analysis of submarine slope stability

HU Tao-jun¹, YE Yin-can¹

(1. *Second Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Hangzhou 310012, China*)

Abstract: Considering the nonlinear feature of wave in shallow waters, the cnoidal wave theory is used to calculate the wave force for submarine slope stability. A new approximate method is proposed for solving cnoidal wave problem which can be used in the whole water depth. Combined with an example, the calculation steps of wave force are determined on the submarine slope, and procedures are compiled.

Key words: slope stability; wave force; cnoidal wave; nonlinear dispersion equation