

海浪预报的数值模拟(II)

黄 铎

(地理学部)

【摘要】在本文内,我们将 Roberts 和 Weiss 格式推广到二维,且给出对称形式,并将其应用于海浪预报,结果很好。同时也与国际上现在流行的几个海浪预报方法进行了对比,结果表明,我们的方法是好的。最后,提出了几个尚须进一步研究的问题。

关键词: Roberts and Weiss 格式, 海浪预报

在文[1]内,我们用迎风格式数值求解了海浪波谱方程,取得了比较满意的结果,向着海浪预报数值化迈出了一步。同时,也提出了三个有待解决的问题,其中之一便是“所用差分方法本身具有格式粘性,如何减少格式粘性,尚有待进一步研究”。

本文将具体解决这个问题,共分三个部分:1. 海浪预报的数学模型。2. 数值模拟方法的简单介绍。3. 尚须进一步研究的几个问题。

1 海浪预报的数学模型

根据能量守恒原理,可求得海浪波谱方程(参见文[3],[4])

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\vec{c}_g \cdot \nabla S + F(S) \quad (1-1)$$

其中, S 表示海浪谱, $\vec{c}_g$ 为群速度, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ 为梯度算符。

$$\vec{c}_g = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \vec{k}_0$$

$$F(S) = \begin{cases} (\alpha + \beta S) \left[1 - \left(\frac{S}{S_\infty} \right)^2 \right] G(\varphi) & \varphi < \frac{\pi}{2}, S > S_\infty \\ -Df^4 S & \varphi < \frac{\pi}{2}, S \leq S_\infty \\ -[\beta G(\varphi) + Df^4] \cdot S & \varphi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

g 表示重力加速度, k 表示波数, 由下式确定:

$$gk \tanh(kh) - (2\pi f)^2 = 0$$

$\vec{k}_0$ 为单位群速度向量, h 表示局部水深, f 表示组成波频率, 一般公认为海浪能量集中在低频部分, 计算时取 $0.04 \leq f \leq 0.24$ 。 φ 为风向与浪向夹角。 $S_\infty = \frac{ag^2}{\omega^5} e^{-b'g/\omega^4}$ 为饱和波谱,

$a = 0.83 \times 10^{-2}$, $b' = 0.74$ 。 u 为海平面上方 19.5 米处的风速, $\omega = 2\pi f$, $D = 3$, $G(\varphi) = \frac{8}{3\pi} \cos^4 \varphi$

$$\alpha = \alpha(f, u) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{u} \right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{9.8 \sin \varphi} \right)^2 \left[\frac{1}{9} \left(\frac{\omega}{u} \right)^{2.5} + \left(\frac{\omega^2}{9.8 \cos \varphi} - \frac{\omega}{u} \right)^2 \right] d\varphi$$

$$\beta = \beta(f, u_*) = \left[5e^{-7000 \left(\frac{u}{c} - 0.001 \right)^2} + 2612 \left(\frac{u_*}{c} \right)^2 e^{-0.0004 \left(\frac{u}{c} \right)^2} \right] \times f$$

$$C = \frac{1.56}{f}, \quad u_* = 0.044u$$

方程 (1-1) 的边界条件:

$$S|_{r_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial n} \Big|_{r_2} = 0$$

其中 T_1 为陆地边界, T_2 为海上边界, n 表示海上边界的外法向。

方程的初始条件: $S|_{t=0} = S_\infty$

在求出波谱 $S = S(t, x, y, f, \varphi)$ 以后, 须求有效波高及有效波周期及主浪向, 他们分别是:

$$H(x, y, t) = \int_{f_1}^{f_2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_s^2 K_f^2 S(t, x, y, f, \varphi) df d\varphi$$

$$T(x, y, t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{0.9} \left[\frac{\int_{f_1}^{f_2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_s^2 K_f^2 S(t, x, y, f, \varphi) df d\varphi}{\int_{f_1}^{f_2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_s^2 K_f^2 f^2 S(t, x, y, f, \varphi) df d\varphi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$W(x, y, t) = \frac{\max}{\varphi} \int_{f_1}^{f_2} K_s^2 K_f^2 S(t, x, y, f, \varphi) df$$

其中 $[f_1, f_2]$ 在计算时取 $[0.04, 0.24]$, K_s 为变浅系数。由下式确定:

$$K_s = \left[\frac{2 \cosh^2(Kh)}{2Kh + \sinh(2Kh)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

K_r 为折射系数, 通常认为 $K_r \approx 1$ 。

2 数值模拟方法的简单介绍

1° 对形如

$$\frac{\partial S}{\partial t} = C_v \frac{\partial S}{\partial x} \quad (2-1)$$

的模型方程, Roberts 和 Weiss^[1] 提出如下格式:

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n + \frac{\tau}{2-\tau} (S_{i,j-1}^{n+1} - S_{i,j-1}^n) \quad (2-2)$$

其中 $\tau = \frac{C_v \tau}{h}$, τ 和 h 分别是时间及空间步长, 将格式 (2-2) 在 $(\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, jh)$ 点展开, 便有:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = C_v \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{C_v h}{6} \left(\frac{C_v \tau}{2} - h \right) \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + O(h^3 \tau^3)$$

由此, 据文[5], [6] 知, 此格式为 2 阶精度, 无格式粘性, 稳定, 且易于看出, 色散项也是比较小的, 再注意, (2-2) 虽然为隐式, 但无须求解方程组, 可通过沿 j 增大的方向扫描而求解, 根据上面的分析, 格式 (2-2) 正是我们在海浪预报中所期望的格式。

2° 我们不难把 (2-2) 推广到二维问题, 即: 针对二维对流方程:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = C_{v,x} \frac{\partial S}{\partial x} + C_{v,y} \frac{\partial S}{\partial y} \quad (2-3)$$

我们利用下述格式来数值求解 (2-3)

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n + \frac{\tau_x}{2-\tau_x-\tau_y} (S_{i,j-1}^{n+1} - S_{i,j-1}^n) + \frac{\tau_y}{2-\tau_x-\tau_y} (S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j+1}^n) \quad (2-4)$$

$\tau_x = \frac{C_{v,x} \tau}{h_x}$, $\tau_y = \frac{C_{v,y} \tau}{h_y}$ 其中 τ , h_x , h_y 分别为时间及 x , y 方向的步长, 计算时沿 i , j 增加方向扫描, 从而隐格式变为显格式。考虑到 (2-2) 及 (2-4) 的不对称性会对解的激烈变化区域的位置有影响, 在此我们提出一对称扫描格式。

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n + \frac{\tau_x}{2-\tau_x-\tau_y} (S_{i,j-1}^{n+1} - S_{i,j-1}^n) + \frac{\tau_y}{2-\tau_x-\tau_y} (S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j+1}^n) \quad (2-5)$$

$$S_{i,j}^{n+2} = S_{i,j}^{n+1} + \frac{\tau_x}{2+\tau_x+\tau_y} (S_{i,j-1}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+2}) + \frac{\tau_y}{2+\tau_x+\tau_y} (S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j+1}^{n+2}) \quad (2-6)$$

具体计算时, 先用 (2-5) 沿 i , j 增加方向扫描一次, 然后时间层增加 1, 再沿 i , j 减少方向扫描一次, 这样周而复始地进行。

3° 格式 (2-4) 对海浪预报的应用。

将格式 (2-4) 应用于海浪波谱方程 (1-1), 即

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^n + \frac{\tau_x^*}{2+\tau_x^*+\tau_y^*} (S_{i,j-1}^{n+1} - S_{i,j-1}^n) + \frac{\tau_y^*}{2+\tau_x^*+\tau_y^*} (S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j+1}^n) + \frac{\tau F(S_{i,j}^n)}{2+\tau_x^*+\tau_y^*} \quad (2-7)$$

其中

$$\tau_x^* = \frac{C_{v,x}^* \tau}{h_x}, \quad \tau_y^* = \frac{C_{v,y}^* \tau}{h_y}$$

我们用格式 (2-7) 对中国海海浪预报进行了数值模拟, 结果与文[1]内的结果基本吻合, 有效波高及狂涛区域更与观测结果吻合, 这已在[2]文内有所论述。今将格式 (2-5)

(2—6) 应用波谱方程(1—1), 数值模拟结果已很令人满意。这使我们坚信, 格式(2—5)(2—6) 在海浪预报的数值模拟中将有强大生命力。具体步骤与文[1]同, 不再赘述。

4° 与国外几个现用方法的比较

A. $S_{\omega}|f_{\omega}|^{1/2}$ 迎风格式, 但加上计算机的“逻辑修正”来减少波浪的耗散, 原文我们未见到, 因对“计算机的逻辑修正”如何加法, 不敢妄加评论, 但有一点可以肯定, 无论怎样加法, 都含有人工的意味。

B. Ewing^[9]方法, 该方法求解模型方程(1—1)时, 即为:

$$S_{i+1}^{n+1} = S_i^n + \left[\frac{1}{12} r / \left(1 - \frac{1}{12} r \right) \right] S_i^n + 8(S_{i+1/2}^{n+1/2} - S_{i-1/2}^{n+1/2}) - S_{i+1/2}^{n+1/2}$$

此格式的稳定性条件是 $r \leq 2$, 要求存贮三个时间层的 S 值, 一维情形涉及到 5 个点, 二维情形则涉及到 9 个点, 而且要利用交错网络, 这会给边界条件的处理带来很大的困难。同时也不难看出存贮量与计算量都增大, 而我们的方法则是无条件稳定的, 一维情形只涉及到二层三点, 二维情形只涉及到二层五点, 因而存贮及计算量都远小于 Ewing 方法。边界条件处理也简单易行。

C. Golding^[10]方法 (其实是 Lax-Wendroft 方法)

Step 1

$$S_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (S_i^n + S_{i+1}^n) - \frac{1}{2} r (S_{i+1}^n - S_i^n)$$

Step 2

$$S_i^{n+1} = S_i^n - r \left[(1 + a)(S_{i+1/2}^{n+1/2} - S_{i-1/2}^{n+1/2}) - \frac{a}{3} (S_{i+3/2}^{n+1/2} - S_{i-3/2}^{n+1/2}) \right]$$

从这个对模型方程(1—1)的格式可以看出: 每计算一层 S_i^{n+1} , 须分两步, 存贮三个时间层的数据, 一维问题要涉及到 5 点, 二维则要涉及到 9 点, 要用交错网络, 为保证格式稳定须 $r \leq 2$, 显然这些都加大了计算量, 存贮量, 及边界条件处理的困难。而我们的方法则回避了这些弊端。

3 尚待进一步研究的问题

尽管我们的方法对海浪数值预报取得了令人满意的结果, 但这还仅仅是开始, 这一方面是由于这个学科还很年青, 而问题又很复杂所致, 另一方面更主要的是在数值计算中出现的问题还远不能给出合理的解决, 这些问题既有模型方面的, 也有边界条件、初始条件的问题, 还有数值计算方面的问题, 现将其中的某几个写出来, 以激励和鞭策我们努力工作, 以期在不远的将来加以解决, 更渴望得到专家、同志们的帮助和指数。

1° 海浪波谱初始数据的给定问题。

2° 数值求解双曲方程时, 无反射边界条件或吸收边界条件的研究工作。

3° 灾害性天气预报的数值化是重点攻关项目, 海浪预报是其中的一个子项目, 为使海浪预报数值化得以实现, 提供海面风场是极为必要的。这个问题的实质, 即海洋、大气的耦合研究, 要抓紧进行。

最后, 对国家海洋局海洋环境预报中心所给予的人力, 图书资料, 机时等诸多方面的帮

助支持, 谨致谢意, 并向我的合作者们致意. 正是他们把我领进了这个充满迷惑而令人神往的领域. 也是他们教会了我做出这点滴工作。

参 考 文 献

- 1 Yi Zeng Xin 伊增欣, Huang Duo. A Wind-wave Prediction Model for the China Sea . (ISPSBECS, 青岛) 1986.
- 2 Yi Zeng Xin, Huang Duo, Jin Zhengang. A PSedo-implicit propagation scheme and its application to the prediction of Ocean wind waves. IUGG OPS6 van-couver Canade (1987)
- 3 I. Isozaki, T. Uji. Numerical Prediction of Ocean Wind Waves Papers in Met and Geophys. 1973, 24 (2) :
- 4 文茎常, 宇宙文. 海浪的数学理论. 科学出版社
- 5 C. W. Hirt, J. Comp. Phys. 1968, (2) : 339
- 6 R. F. Warming, B. J. Hyett, J. Comp. Phys. 1974, (14) 159
- 7 Roberts, K. V, and Weiss, N. O. (1966) Mathematics of Computation. Vol, 20 (4) . 272—329
- 8 Ewing, J. A, A Review of the Research of Wind Waves During the Past 25 years, Geophys J. R. Astr. Soc. Vol. 74 1983, 313—329
- 9 Golding Brian, W. A Depth Dependent Wave Model for Operational Forecasting. Meteorological office, Berhshire, England. 1977
- 10 John Noye. Computational techniques for differential equations. 1984

A Numerical Simulation on Ocean-Wave Prediction(II)

Huang Duo

(Basic Science Department)

Abstract

In this paper, roberts and weiss Scheme is generalized to two dimensional with a symmetrical form and is applied fo ocean-wave prediction of China Sea. A comparision is made between the proposed scheme with other schemes abroad in recent years for ocean-wave prediction. The results show that ours is much better. Besides, some problems that should be further studied are proposed.

Key words: roberts and weiss scheme. ocean-wave prediction