维普资讯 http://www.cqvip.com

第11卷 第1期 热 带 海 洋 Vol.11, No.1
1992年2月 TROPIC OCEANOLOGY Feb., 1992

风海流方程三系数谱模式的多态解问题

季仲贞
(LASG，中国科学院大气物理研究所，北京 100080)
郑朝洲 季素贞
(中国科学院系统科学研究所，北京 100080) (陕西机械学院计算中心，西安 710048)

提 要

本文研究一个带强迫、耗散的非线性准地转海流方程三系数低谱模式的多态解问题，着重讨论了类似热带气旋下的海流状况，给出了多态解与Rossby数(R)和底摩擦参数(ε)的依赖关系图。看到在$R<0.5$和$\varepsilon<0.22$的范围内有1个近似三角形的区域存在3个平衡解，其中有2个解是稳定的，另1个是不稳定的。稳定平衡解的特征是其展开系数A很大或B较大；而不稳定解是A和B均较小。它们分别反映了风应力反馈给海洋的能量较多或较小，并且A大时解的稳定性比B大时的稳定性要稳靠得多。

关键词：海流方程，低谱模式，多态解，平衡解

自1979年J.G.Charney和J.G.Devore的论文[3]发表以来，在国内外关于大气方程多态解问题的讨论如雨后春笋，这给天气、气候系统的发展提供了新的理论解释，引起人们很大的兴趣。然而对海洋方程多态解问题的分析却相对较少，并非这类问题对海洋科学事业不重要，主要是由于获取海洋观测资料困难，大大限制了人们对问题认识的深入。近若干年来，随着海流数值模拟工作的发展，开展海流方程多态解问题讨论的迫切性和重要性愈来愈显现出来了。其实，早在1963年G.Veronis[4]就已分析讨论过有关风海流方程的多态解问题。不久前，我们采用了稍不同于文献〔4〕中的做法，重新分析讨论了四系数低谱海流模型的多态解问题，看到在多态解与若干物理参量的依赖关系及稳定解的分布区上均与文献〔4〕中的结果有一定差异[2]。为了进一步搞清楚这类低谱模式的多态解及其稳定性问题，本文选取三系数低谱近似作更仔细的分析，得到一些有意义的结果。

一、模 式

类似文献〔2，4〕，对无因次非线性准地转海流方程

$$\frac{\partial \nabla^2\psi}{\partial t}+RJ(\psi,\nabla^2\psi)+\frac{\partial \psi}{\partial x}=-\varepsilon\nabla^2\psi+G \qquad (1)$$

本文于1991年1月16日收到。

维普资讯 http://www.cqvip.com

取如下高截谱展开

$$\psi = a_1 \sin x \sin y + a_2 \sin 2x \sin y + a_3 \sin x \sin 2y,$$
$$G = G_1 \sin x \sin y + G_2 \sin 2x \sin y + G_3 \sin x \sin 2y$$

可得关于谱展开系数的方程组如下：

$$\eta\lambda_n \frac{\partial a_n}{\partial t} + R\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\lambda_m D_{k,m,n} a_k a_m - \sum_{j=1}^{4} C_{j,n} a_j = -\varepsilon\lambda_n a_n - G_n \quad (n = 1, 2, 3) \tag{2}$$

其中：　$D_{k,m,n} = \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n J(\psi_k, \psi_m) dx dy$，　$C_{j,n} = \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy$，

$$G_n = \int_0^\pi \int_0^\pi \psi_n G dx dy, \quad \varepsilon = \frac{\pi^2}{4}\tilde{\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\pi^2}{4};$$

$c_{12} = -c_{21} = 2\pi/3$，　$D_{123} = -D_{132} = -D_{213} = D_{231} = D_{312} = -D_{321}$；

$\lambda_1 = 2$，　$\lambda_2 = \lambda_3 = 5$。

于是，模式方程可具体化简为

$$\begin{cases} \eta\dfrac{da_1}{dt} + \dfrac{\pi}{3} a_2 = \varepsilon a_1 - \dfrac{G_1}{2} \\ \eta\dfrac{da_2}{dt} - \dfrac{9R\pi^2}{80} a_1 a_3 - \dfrac{2\pi}{15} a_1 = \varepsilon a_2 - \dfrac{G_2}{5} \\ \eta\dfrac{da_3}{dt} + \dfrac{9R\pi^2}{80} a_1 a_2 = \varepsilon a_3 - \dfrac{G_3}{5} \end{cases} \tag{3}$$

其中包含参数R的项是非线性项，等式左边一项是β项，等式右边含参数ε的项为底摩擦项，包含G_i的项是风应力强迫项。

可以看到，方程组(3)是关于a_1, a_2, a_3的非齐次常微分方程组（$\because G_1, G_2, G_3$不全为0），故$a_1 = a_2 = a_3 = 0$不可能是其平衡解。不难知道方程组(3)中至少有一个非零解，不妨令其为$a_i(t) = A_i + \alpha_i(t)$，$(i = 1, 2, 3)$。于是可得关于扰动量$\alpha_i(t)$的齐次方程组

$$\begin{cases} \eta\dfrac{d\alpha_1}{dt} = -\dfrac{\pi}{3}\alpha_2 - \varepsilon\alpha_1 \\ \eta\dfrac{d\alpha_2}{dt} = r(\alpha_1\alpha_3 + A_1\alpha_3 + A_3\alpha_1) + \dfrac{2\pi}{15}\alpha_1 - \varepsilon\alpha_2 \\ \eta\dfrac{d\alpha_3}{dt} = -\gamma(\alpha_1\alpha_2 + A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1) - \varepsilon\alpha_3 \end{cases} \tag{4}$$

二、平　衡　解

定常平衡解是方程组(3)的全体解集合中的一个关键性子集，它们可以作为模式参数ε，λ_n和G_n的代数函数解析地或数值地确定。

维普资讯 http://www.cqvip.com

用γ遍乘(3)式两边，不妨取$a_i(t)=0$ $(i=1,2,3)$并记$A\equiv\gamma A_1$，$B\equiv\gamma A_2$，$C=\gamma A_3$，$\gamma_i=\gamma G_i(i=1,2,3)$，于是可得关于平衡解$A,B,C$的代数方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{3}B+\varepsilon A=-\dfrac{\gamma_1}{2} \\ -AC-\dfrac{2\pi}{15}A+\varepsilon B=-\dfrac{\gamma_2}{5} \\ AB+\varepsilon C=-\dfrac{\gamma_3}{5} \end{cases} \tag{5}$$

直接求解(5)可得：

$$B=-\frac{3}{\pi}\left(\varepsilon A+\frac{\gamma_1}{2}\right),$$

$$C=-\frac{2\pi}{15}-\frac{3}{\pi}\varepsilon^2+\left(\frac{\gamma_2}{5}-\frac{3}{\pi}\varepsilon\frac{\gamma_1}{2}\right)\frac{1}{A}，\text{和}$$

$$(\varepsilon A)^3+\frac{\gamma_1}{2}(\varepsilon A)^2+\left[\left(\frac{2\pi^2}{45}+\varepsilon^2\right)\varepsilon^2-\frac{\pi\varepsilon}{15}\gamma_3\right]\varepsilon A$$

$$+\varepsilon^3\left(\frac{\gamma_2\pi}{15}-\varepsilon\frac{\gamma_1}{2}\right)=0。 \tag{6}$$

依赖于参数ε，R和$\gamma_i(i=1,2,3)$的选取，方程(6)可能有1个实解也可能有3个实解，这就是说方程组(5)可能有3个平衡解也可能只有1个平衡解。例如，如果取$\gamma_1=\gamma=1$，$\gamma_2=\gamma_3=0$和$\varepsilon\ll1$，由(5)式可以看到一个近似解为

$$A=\gamma A_1\approx 0，B=\gamma A_2\approx-\frac{3}{2\pi}\gamma_1，C=\gamma A_3\approx 0 \tag{7}$$

这就是著名的Sverdrup解，其本质反映β项与风应力旋度之间的平衡，对于很小的ε，

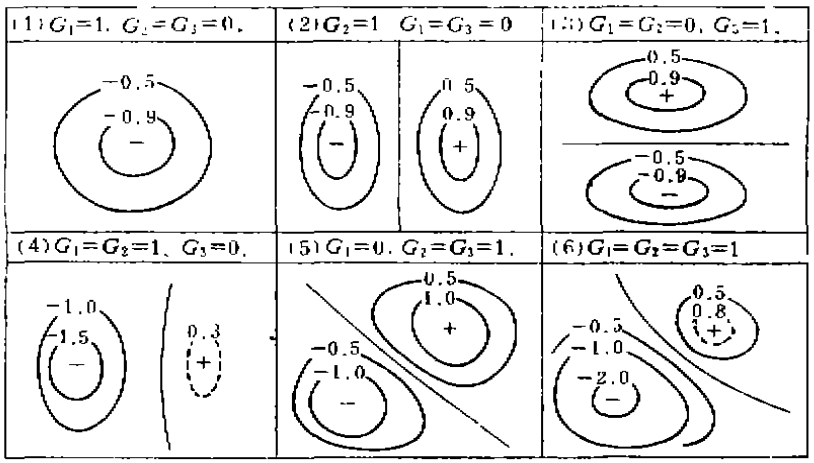

图1 风应力强迫函数

Fig.1 Wind-stress forcing function

表 1　若干典型参数值下方程组(5)的平衡解

Tab.1　Some values of stationary solution of system(5) with some typical parameters

R	ε	A	B	C
0.1	0.01	−0.07886	−0.05225	−0.41212
		−5.46986	−0.00077	−0.41878
		−0.00129	−0.05299	−0.00682
	0.1	−0.01257	−0.05180	−0.00650
	1.0	−0.03859	−0.01614	−0.00062
$\frac{1}{3}$	0.01	−0.01836	−0.17654	−0.32380
		−18.4813	−0.0002	−0.4189
		−0.0054	−0.1766	−0.0953
	0.1	−0.2258	−0.1551	−0.3501
		−1.5727	−0.0265	−0.4172
		−0.0521	−0.1717	−0.0896
	1.0	−0.1293	−0.0533	−0.0069
1.0	0.01	−55.5071	−0.0001	−0.4189
	0.1	−5.4713	−0.0076	−0.4189
	1.0	−0.4030	−0.1452	−0.0585

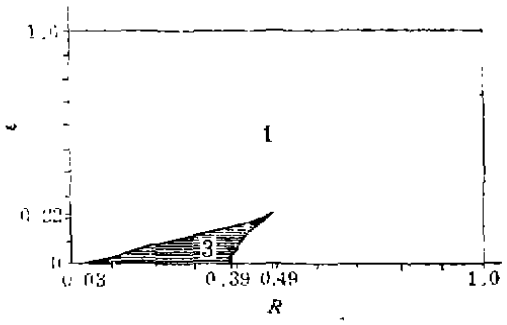

图 2　$r_1=1, r_2=r_3=0$ 时方程(6)的实根分布
图中的数字表示实根个数

Fig.2　Distribution of real roots of equations (6) when $\gamma_1=1$ and $\gamma_2=\gamma_3=0$

(7)式总是(5)式的一个解。

图 1(1)给出的是当 $G_1=1$ 和 $G_2=G_3=0$ 时的风应力强迫函数 G。这时是一个类似于气旋式的分布，似可视为 1 个对称热带气旋分布。讨论这种风应力强迫下的海流状况可以近似反映实际台风下的海

表 2　若干典型参数值下方程组(5)中各项的数值一览表

Tab.2　Some values of all terms of system (5) with some typical parameters

R	ε	第一方程			第二方程			第三方程		备注
		$-\frac{1}{2}r_1$	$\frac{\pi}{3}B$	εA	$-AC$	$-\frac{2\pi}{15}A$	εB	AB	εC	
0.1	0.01	0.0555	−0.0547	−0.0008	−0.0325	0.0330	−0.0005	0.0041	−0.0041	A小B小
			−0.0008	−0.0547	−0.2907	2.2912	0.0000	0.0042	−0.0042	大A
			−0.0555	−0.0000	0.0000	0.0005	−0.0005	0.0001	−0.0001	S解B大
	0.1	0.0555	−0.0542	−0.0012	−0.0001	0.0053	−0.0052	0.0007	−0.0007	S解B大
	1.0	0.0555	−0.0169	−0.0386	−0.0000	0.0162	−0.0161	0.0006	−0.0006	ε大
$\frac{1}{3}$	0.01	0.18505	−0.1849	−0.0002	0.0059	0.0077	−0.0018	0.0030	−0.0032	A小B小
			−0.0002	−0.1848	−7.7418	7.7414	0.0000	0.0037	−0.0042	大A
			−0.1849	−0.0001	0.0005	0.0023	−0.0018	0.0010	−0.0010	S解B大
	0.1	0.18505	−0.1624	−0.0226	−0.0790	0.0945	−0.0155	0.0350	−0.0350	A小B小
			−0.0278	−0.1573	−0.6561	0.6583	−0.0027	0.0417	−0.0417	大A
			−0.1798	−0.0052	−0.0047	0.0212	−0.0172	0.0089	−0.0089	S解B大
	1.0	0.18505	−0.0558	−0.1293	−0.0009	0.0542	−0.0533	0.0069	−0.0069	ε大
1.0	0.01	0.55515	−0.0001	−0.5551	−23.2519	23.2508	0.0000	0.0058	−0.0041	大 A
	0.1	0.55515	−0.0079	−0.5471	2.2919	2.2918	0.0008	0.0416	−0.0419	大 A
	1.0	0.55515	−0.1521	−0.4030	−0.0236	0.1688	−0.1452	0.0585	−0.0585	ε大

维普资讯 http://www.cqvip.com

流状况，因此这是较有实际意义的。本文以下的全部讨论，如无特别声明，均指 $G_1=1$ 和 $G_2=G_3=0$ 的情形。图 2 给出当 $\gamma_1=\gamma=1$ 和 $\gamma_2=\gamma_3=0$ 时方程(6)的实根分布。图中数字 1 和 3 分别表示方程(6)有 1 个实根和 3 个实根存在。不难看到，图中的阴影区是 3 个实根的存在区，也正是海流方程多态解的存在区。

表 1 给出了一些有代表性的参数 R 和 ε 值情形下方程组(5)的平衡解的数值。从表可见，在($R=0.1$，$\varepsilon=0.01$)，($R=1/3$，$\varepsilon=0.01$)和($R=1/3$，$\varepsilon=0.1$)这三种情况下均有 3 组平衡解存在，而其余情形只有 1 组平衡解。通过进一步计算方程组(5)中各项的具体数值，不难看到所有出现 3 组平衡解的情形均有如下特征：(1)在第一组解中，由方程组(5)的第二个方程反映出非线性项和底摩擦项共同起作用，与 β 项相平衡；(2)在第二组解中，$|A|$ 的数值特别大，大大超过 $|B|$，$|C|$ 的数值，方程组(5)的第二个方程中反映出非线项 AC 的量级较大，并与 β 项(即 εB 项)相平衡；(3)在第三组解中，$|B|$ 的数值较大，β 项(即 $\frac{\pi}{3}-B$)与风应力项(即 $-\frac{1}{2}\gamma_1$)相平衡，它表明这时出现

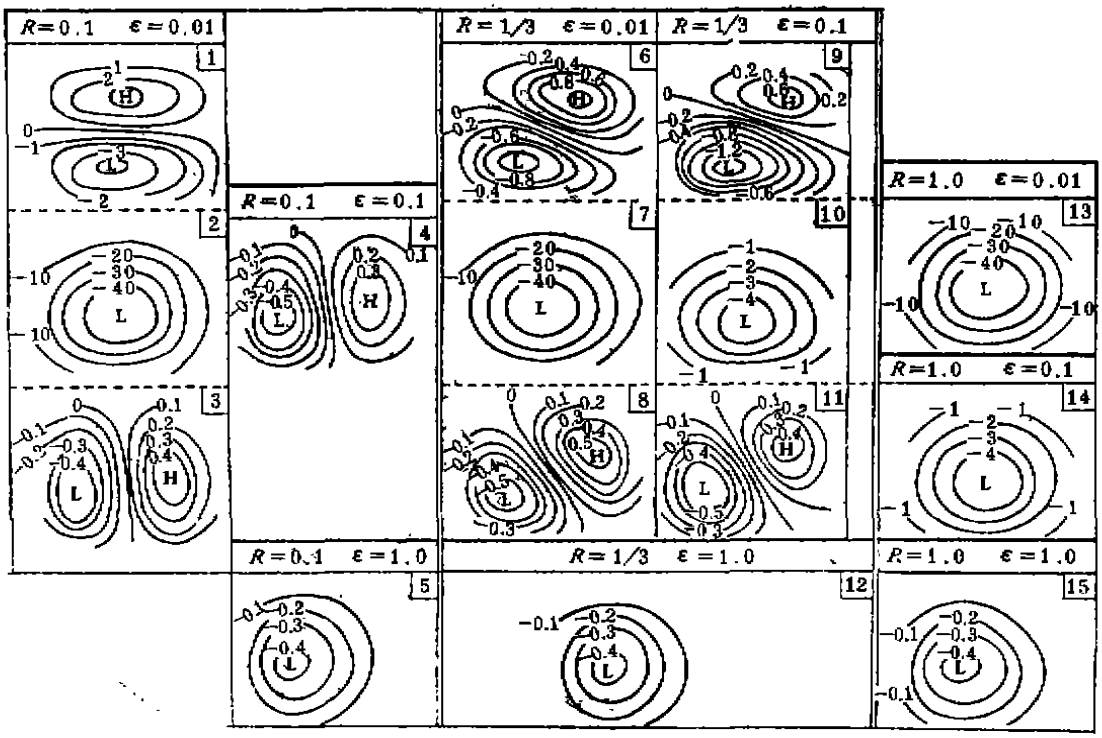

图 3 参数 R 和 ε 的各种取值情况下的流函数图

Fig.3 The figures of stream functions corresponding to various R and ε

的是Sverdrup解(详见表 2)。

图 3 给出 $\gamma_1=\gamma=1$ 和 $\gamma_2=\gamma_3=0$ 时不同 ε 和 R 取值情况下的流函数图。对 $R=0.1$，1/3 和 1 的三种情形，当 $\varepsilon=1$ 时(即底摩擦强时)仅有 1 个位于区域中间的并具有西部强化的涡旋存在。而当 ε 减小(即 $\varepsilon=0.1$ 和 $\varepsilon=0.01$)时，在 $R=1$ 时仍维持 1 个涡旋中心，然

维普资讯 http://www.cqvip.com

而，对于$R=1/3$和$R=0$的情形，有时表现为维持1个涡旋中心，有时却分裂为2个涡旋中心。由本文下一节的稳定性分析可知，维持1个涡旋中心的情形，解总是稳定的；而分裂为2个涡旋中心的情形，依赖于方程组(5)的平衡解的量级大小不同，解可能是稳定的，也可能是不稳定的。

三、平衡解的稳定性

从上述计算结果知，方程组(5)是可能有3个平衡解的，然而只有其解是稳定的才有实际意义。为此，有必要进一步分析平衡解关于无穷小扰动的稳定性问题。

用A，B，C代表方程组(5)的一组平衡解，与方程组(4)对应的有如下线性化的方程组：

$$\begin{cases} \eta\dfrac{dA'}{dt} = -\dfrac{\pi}{3}B' - \varepsilon A' \\ \eta\dfrac{dB'}{dt} = AC' + CA' + \dfrac{2\pi}{15}A' - \varepsilon B' \\ \eta\dfrac{dC'}{dt} = -(AB' + BA') - \varepsilon C' \end{cases} \tag{8}$$

其中：$A'=\gamma a_1$，$B'=\gamma a_2$，$C'=\gamma a_3$；$A=\gamma A_1$，$B=\gamma A_2$，$C=\gamma A_3$；$\gamma=9\pi^2R/80$。

由于(8)式是关于A'，B'，C'的齐次常微分方程组，故其解可设为

$$A'=e^{\lambda t}a,\quad B'=e^{\lambda t}b,\quad C'=e^{\lambda t}c \tag{9}$$

把(9)代入(8)可得

$$\begin{cases} (\varepsilon+\lambda)a + \dfrac{\pi}{3}b = 0 \\ -\left(c+\dfrac{2\pi}{15}\right)a + (\varepsilon+\lambda)b - Ac = 0 \\ Ba + Ab + (\lambda+\varepsilon)c = 0 \end{cases} \tag{10}$$

方程组(10)是关于a，b，c的齐次代数方程组，有非零解的条件是其系数行列式为零，展开可得

$$(\varepsilon+\lambda)^3 - \frac{\pi}{3}AB + A^2(\varepsilon+\lambda) + \frac{\pi}{3}\left(c+\frac{2\pi}{15}\right)(\varepsilon+\lambda) = 0 \tag{11}$$

令 $\sigma=\varepsilon+\lambda$，$x=A^2+\dfrac{\pi}{3}\left(c+\dfrac{2\pi}{15}\right)$，$y=\dfrac{\pi}{3}AB$，于是(11)式可改写为

$$\lambda^3 + 3\varepsilon\lambda^2 + (3\varepsilon^2+x)\lambda + \varepsilon^3 + x\varepsilon - y = 0 \tag{12}$$

根据常微分方程定性理论，方程(5)的平衡解是否渐近稳定，可由方程(12)的根是否都有负实部来决定。利用Hurwitz定理[4]，我们具体计算了在不同ε和R取值情况下方程(12)的根，所得结果同样有图2的形状，图上阴影区表示有两个稳定的平衡解存在，而其余的区域只有一个稳定的平衡解。

维普资讯 http://www.cqvip.com

表 3 若干典型参数值下方程(12)根的判别式及方程组(5)平衡解的稳定性

Tab.3 The numerical values of discriminants of roots of equation (12) with some typical parameters and stability of stationary solution of system(5)

R	ε	Δ_1	Δ_2	Δ_3	稳定性
0.1	0.01	0.03	0.00451	−0.00002	不稳定
		0.003	0.65281	0.15980	稳定
		0.03	0.00828	0.00003	稳定
	0.1	0.3	0.091715	0.00038	稳定
	1.0	3	8.87963	12.77634	稳定
$\frac{1}{3}$	0.01	0.03	0.00440	−0.00001	不稳定
		0.03	7.63505	29.10260	稳定
		0.03	0.00778	0.00000	稳定
	0.1	0.3	0.15122	−0.00368	不稳定
		0.3	0.54667	0.11200	稳定
		0.3	0.01137	0.00030	稳定
	1.0	3	8.90350	12.82928	稳定
1.0	0.01	0.03	61.62658	1898.38034	稳定
	0.1	0.3	6.03856	17.81060	稳定
	1.0	3	9.14087	13.51496	稳定

今用Δ_1，Δ_2，Δ_3表示判别方程(12)的根是否具有负实部的判别式，于是按Hurwitz定理有

$$\Delta_1 = 3\varepsilon$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3\varepsilon & 1 \\ \varepsilon^3 + x\varepsilon - y & 2\varepsilon^2 + x \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = (\varepsilon^3 + x\varepsilon - y)\Delta_2 .$$

由表3可见，在出现多态解的三种情形中，第一组解均是不稳定的，第二组解和第三组解(Sverdrup解)均是稳定的。

联系图3和表1，我们有如下几点认识：

1. 对应图3中多态解流函数图②，⑦，⑩情况，方程(5)的平衡解分量A的数值大大超过B，C的数值，它反映风应力场把较多能量反馈给海洋，因此对应的解总是稳定的。

2. 对应图3中多态解流函数图③，⑧，⑪情形，其流函数图的形状较近似于风应力强迫函数图1中(2)的样子，它反映方程组(5)中解分量B的量级相对较大，加之该情形有柯氏力项与风应力项相平衡，因此是有助于流场维持左低、右高的形势，故这时平衡解也能是稳定的。

3. 对于图3中多态解流函数图①，⑥，⑨情形，其流函数图的形状较近似于风应力强迫函数图2中(3)的样子，即主要是北高、南低的形势，它反映在方程组(5)中解分量C的数值相对较大，而解分量A和B的数值较小，它表明不仅风应力场反馈给海洋的能量较小，而且其北高、南低的流场形势也不易维持，因此，这时的平衡解是不稳定的。

分析表3，我们可以进一步看到，虽然在解分量B相对大于A，C时，其平衡解是

维普资讯 http://www.cqvip.com

稳定的(如图 3 中的③，⑧，⑪情形)，但其稳定性的可靠性比较差。从稳定性的判别式可见，此时，Δ_2和Δ_3的数值均较小，近乎临界状态，远不如在解分量A数值大时(如图中的②，⑦，⑪，⑬，⑭)的稳定性可靠。这是因为解分量A对应着流函数截谱展式(3)的首项系数，A大反映着系统低波数段集中了较多能量之缘故。

参 考 文 献

〔1〕尤秉礼，1982，常微分方程补充教程，334，人民教育出版社。

〔2〕季仲贞、郑朝洲，1990，风海流方程低谱模式的多态解问题(一)，大气科学，14(4):395—403。

〔3〕Charney, J. G. and J. G. Devore, 1979, Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, 36:1205—1216.

〔4〕Veronis, G., 1963, An analysis of wind-Driven ocean circulation with a limited number of fourier componte, *J. Atmos. Sci.*, 20:577—593.

ON THE MULTIPLE SOLUTIONS TO A THREE-COEFFICIENT SPECTRAL MODEL OF WIND-DRIVING OCEAN CURRENT EQUATION

JI Zhongzhen

(LASG, Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

ZHENG Chaozhou

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing 100080)

JI Suzhen

(Computer Center, Shanxi Institute of Mechanical Engineering, Xi'an 710048)

Abstract

In this paper, a research on the problem of multiple solutions of the three-coefficient low-spectrum model for the nonlinear quasi-geostrophic ocean current equation with forcing and dissipation terms is carried out. The state of ocean current under wind similar to the tropical storm, is discussed carefully. The figure of the relations between the multiple solutions and the Rossby Number (R) and the frictional coefficients (ε) is given. It is seen that in an approximate triangular region with the R less than 0.5, and the ε less than 0.22, there exist three equilibrium solutions, of them two are stable and the other is unstable. The formers are characterized by the large expansion coefficient A or B while the latter is characterized by the small A or B, corresponding to the ocean energy feeded back from the wind stress respectively, and the solution with large A is much stable than that with larger B.

Key words: ocean current equation, low spectral model, multiple solutions, equilibrium solution