

港口海岸工程波浪变形数学模型的发展

黄凌燕 刘海青 李炎保

(天津大学港口及海岸工程系, 天津 300072)

摘要 对目前常用于港口海岸工程的波浪数学模型进行了回顾, 主要介绍了以下四类数学模型, 即 (1) 波向线折射模型, 主要介绍波向线法和针对复杂地形的波谱折射的逆波向线法; (2) 缓坡方程, 大致有三种形式的缓坡方程, 即椭圆型, 双曲型, 抛物线型; (3) Boussinesq 浅水短波方程; (4) 角谱模型。并对不同数学模型的特点、适用范围和发展趋势进行了对比、分析。

关键词 波向线法 逆波向线法 缓坡方程 Boussinesq 浅水短波方程 角谱模型

引言

波浪是港口和海岸工程设计中最为重要的动力因素之一。波浪由深海向岸边传播过程中, 由于地形变化和水工建筑物等因素的影响, 将发生浅水变形, 折射, 绕射, 反射等现象。因此准确地了解这些现象的综合影响, 对海岸工程设计, 特别是合理布置防波堤, 确保港内的泊稳条件, 具有重要意义。

近几十年来, 国内外学者在波浪数学模型的研究和应用上, 得到了很大发展, 通过建立合理的数学模型, 求解了波浪在不同地形上的浅水变形、折射, 绕射、破碎等。根据模型特点, 大致分为四类, 即 (1) 波向线折射模型, 本文主要介绍波向线法和针对复杂地形的波谱折射的逆波向线法, 也有利用波能守恒计算波浪折射的。(2) 缓坡方程, 大致有三种形式的缓坡方程, 即椭圆型, 双曲型, 抛物线型。(3) Boussinesq 浅水短波方程。(4) 角谱模型。

本文的目的是对现有主要数学模型的研究现状作一概述, 并对不同数学模型的特点, 适用范围和发展趋势进行对比、分析。

1 波向线折射模型

1.1 波向线法

波向线法为计算波浪折射的经典方法。波向线法的基本思想是假定波浪沿波峰线的垂直线, 即波向线, 按几何光学传播。最早在波浪变形计算中提出这一思想的 Munk 等人将其建立

收稿日期: 1998-02-25

* 国家自然科学基金 59779004 资助

在较严密的理论基础上,导出波向线的微分方程式:

$$\frac{da}{ds} = -\frac{1}{c} \frac{dc}{dn} \quad (1-1)$$

Berkhoff(1972)的椭圆型缓坡方程忽略 x, y 方向的绕射作用也可简化为以下波向线公式:

$$\eta = ae^{iS} \quad (1-2)$$

式中 η ——波面自由表面位移; a ——波动振幅; S ——相位函数。

从方程(1-2)的实部和虚部可以得到折射方程:

光程函数方程:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - k^2 = 0 \quad (1-3)$$

输运方程:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(cc_g a^2 \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(cc_g a^2 \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \quad (1-4)$$

方程(1-3)中的相位函数 S 可以用特征线法来求解,即为经典的波向线法^[14,24],亦可用其它方法求解。Berkhoff(1976)曾用此公式给出波浪折射图。用方程(1-4)可以计算沿波线的振幅函数。由于波向线法中不考虑绕射、反射,计算量较小,可以用于大面积水域的计算^[15,16]。

以波向线法为基础可以用组成波独立折射的方法计算不规则波的折射。这种方法假定波谱中的不同频率、不同方向的组成波独立地发生折射并于浅水域构成新的波谱,根据此谱就可以给出折射后的海浪特性。Pierson-Neumann-James 首先提出利用方向谱中各组成波独立进行折射计算的一般方法。合田良实采用有效波与方向谱相结合,利用谱分量的线性叠加,计算了不规则波折射。

波向线理论基于缓变水底的假设,假定波能流沿波向线无侧向传递,不考虑由水深变化而引起的绕射和折射影响,其结果只与局部水深有关而与周围坡度或地形变化无关。由于大部分近岸区地形坡度比较小,因此波向线理论被认为是计算大范围波动场特性的一种简便实用的方法。但在海底坡度较大的情况下,波向线理论计算结果的偏差将较大;当水下地形更加复杂时,所追踪的波向线还会在地形突起的区域相交,使波能集中产生焦散现象;在地形凹陷的区域分散,使波向线根本不能进入这些区域,从而产生死区现象,致使这些区域的波高计算值严重失真。

1.2 波谱折射的逆波向线模型

为了解决在复杂地形计算波浪折射的焦散和死区现象,钟正勇、张长宽(1997)根据 Longuet-Higgins 提出的波谱折射基本方程^[48],以及 Dorrestein 提出的波向线可逆的原理^[49],建立了复杂地形水域波谱折射的逆波向线模型^[4~7]。下面介绍这一方法。

深水海浪在向近岸传播的过程中,由于受水深、地形和水流等因素的影响,将发生折射变形,这反映了波能量在近岸区的重新分配。假定研究海域的波浪能量分布为 $S(f, \theta, \bar{r})$, 其中, θ 是波向, f 是波动频率, $\bar{r}$ 是位置矢量。在深水开敞水域,波浪能量随位置的变化不大,因此,可以假定海域深水边界上的波浪能量均匀分布,并以 $S_0(f, \theta)$ 表示,式中 0 代表深水, θ 表示深水波向角。波浪折射的计算目的是:对不同的深水边界波谱 $S_0(f, \theta)$, 确定近岸浅水某点 p 处的波浪状况或波能分布 $S_p(f, \varphi)$, φ 为浅水点的波向角。

Longuet-Higgins(1957)提出了沿任一条波向线成立的波谱折射基本方程,建立了同一

条波向线上离岸深水区与近岸浅水计算点之间的波谱折射变形关系。表述为, 沿任何一条波向线为:

$$S_p(f, \varphi) = \frac{c_0 c_{g_0}}{c c_g} S_0(f, \theta) = F S_0(f, \theta) \quad (1-5)$$

式中 c ——波速; c_g ——波群速度; $F = \frac{c_0 - c_{g_0}}{c c_g}$ 称为传递函数。

对每一频率分量 f , 将式(1-5)对 φ 进行积分

$$S_p(f_j) = \int S_p(f_j, \varphi) d\varphi = F(f_j) \int S_0(f_j, \theta) d\varphi \quad (1-6)$$

将对应于频率 f_j 的所有波向线代入式(1-6)右端的积分进行求和, 以 $\Delta\varphi$ 表示 p 点的分散角, 并以角度 $\Delta\beta$ 为间距将深水波谱的波向离散成 m 等分, 假定由 p 点发出的波向线到达深水边界, 且波向落在 $(i-1)\Delta\beta$ 和 $\Delta\beta$ 之间的条数为 N_i , 并假定 $S_0(f_j, \theta)$ 在这一角度区间内为常数, 对应波谱曲线下的面积为 $A_i(f_j)$ 。则式(1-6)成为:

$$S_p(f_j) = F(f_j) \frac{\Delta\varphi}{\Delta\beta} \sum_{i=1}^m A_i(f_j) N_i \quad (1-7)$$

对每一频率 f_j ($j=1, 2, \dots, n$) 用式(1-7)进行计算, 便获得近岸浅水点 p 的波谱 $S_p(f)$, 再根据特征波要素与波谱的关系就可以求得有效波高和波周期。

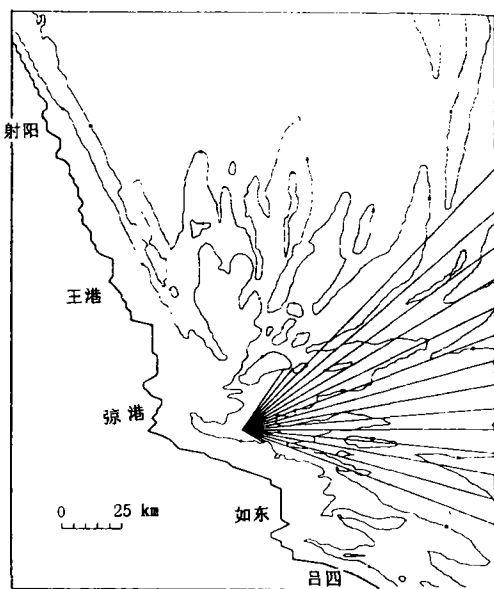


图1 波向线逆向追踪示意图

算点波谱之间的定量关系, 从而求得近岸点的波谱折射值, 进而得到相应的特征波高和波周期; 由于采用了逆波向线法, 保证了深水区的波向线到近岸处汇聚于一点而可以直接进行谱分量的线性叠加, 解决了通常方法从深水推算波向线至近岸区不在一点而无法直接叠加的难点。而且波谱与逆波向线法的结合使这种模式能够从很大程度上改善焦散和死区现象, 同时计算只考虑计算域中的一些代表点, 大大减少了计算量, 所以被用来计算象黄海辐射沙洲这

钟正勇、张长宽(1997)^[6,7]采用逆波向线法计算上述模型。Dorrestein(1960)提出了波向线可逆的原理, 认为波向线与光线一样, 是完全可逆的。根据这一思想, 逆波向线的计算过程包括: 先以一定的间隔将频率进行离散。然后对应于频率 f_j , 从所关心的近岸浅水点, 以很小的角度间隔 $\Delta\varphi$, 逆向追踪一系列波向线到深水区域, 从而构成一个波向线扇面(图1)。但有一部分波向线到达不了深水区, 而是向岸直至触及岸线。这些波向线将被忽略, 而只有到达深水区的波向线才考虑。到达深水区的波向线的方向将按一定的角度间隔分组, 以此来表示深水方向谱的角度离散。有了按频率和方向离散追踪得到的一系列波向线, 就使近岸计算点的方向谱可以通过深水区的方向谱来推算。

这一模型可以给出深水区波谱和折射计

样复杂海域的波浪浅水变形问题。此模型为单一的折射模型, 并没有综合考虑折射、绕射、反射以及水流之间的影响。

1.3 其他方法

除了上述利用波向线法和逆波向线法计算波浪折射外, 也可用波浪守恒和波能守恒计算波浪折射、绕射的。宋志尧等(1997)根据波密度守恒方程、波数无旋性方程和波能平衡方程, 建立了一种适用于开敞水域的规则波折射模型^[8]。徐世凯、王红川和洪广文(1996)用具有侧向能量传递的波能方程进行波浪折射绕射的联合计算, 并且同时考虑了底摩擦的影响^[11]。

2 缓坡方程

2.1 椭圆型缓坡方程

Berkhoff (1972, 1976) 在无旋的线性斜坡假定下, 不考虑底摩擦和破碎情况, 导出了描述波浪运动的椭圆型缓坡方程, 这种模型可以描述波浪的折射和绕射联合变形。方程形式如下:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(cc_g \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(cc_g \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) + \frac{c_g}{c} \omega^2 \eta = 0 \quad (2-1)$$

式中 η ——自由表面位移; ω ——角频率; c ——相位速度 ($c = \omega/k$); c_g ——波群速度 ($c_g = nc$); n ——浅水算子; $n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$; k ——波数; 满足色散关系 $\omega^2 = gk \tanh(kh)$; g ——重力加速度; h ——水深; x, y ——水平位置坐标。

上述椭圆型方程的求解需要沿整个求解域外周边线的边界条件。这可能为:

- a) 在固定边界的部分反射或全反射。
- b) 已知的人射波场或(和)开边界的辐射边界条件。

这种联合折、绕射模型既可以用来计算波浪在海岸地区的传播, 也可以解决港内水域的波浪变形。此椭圆型模型可以通过有限元或边界元来求解(Berkhoff 1976)。但是由于求解边界问题的困难性和耗费大量机时, 上述方程一般被用于小面积水域^[16, 17]。

Booij (1983) 对 Berkhoff 椭圆型缓坡方程的准确性作了验证, 给出以下结论: (1) 当波浪平行于等深线传播时, 缓坡方程在 1:1 底坡形状时, 仍能得到精确解。(2) 当波浪垂直于等深线传播时, 缓坡方程最大用于 1:3 的坡度^[19]。

Bin li (1994) 提出了用广义共轭梯度法 (Generalized Conjugate Gradient, 简称 GCG 法) 求解椭圆型缓坡方程^[20, 21]。GCG 法可以有很快的收敛速度, 要求计算机内存也较少, 可以用于复杂的非矩形区域, 与 Berkhoff (1982) 的试验资料相比, 得到了很好的一致性。

2.2 抛物型缓坡方程 (PEM)

Radder (1979) 以椭圆型缓坡方程为基础, 忽略反射作用, 考虑沿波峰线方向的绕射作用和折射作用, 导出了抛物型缓坡方程^[18], 方程形式如下:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \left[ik - \frac{1}{2kcc_g} \frac{\partial}{\partial x} (kcc_g) \right] \eta + \frac{i}{2kcc_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(cc_g - \frac{\partial}{\partial y} \eta \right) \quad (2-2)$$

式中 i ——虚单位 ($i^2 = -1$); x ——波浪传播主方向 ($x > 0$) 即前进波; c, c_g ——分别表示波

速,波群速。

式(2-2)要求波浪传播方向与主方向 x 相差很小,实际上这种限制是很苛刻的。Kirby (1983, 1986) 在一系列论文中对此理论进行了发展^[22,23], 并利用 Pade 展开和最小误差 (Minimax) 方法, 使 PEM 理论可应用于较大的传播角度, 设主方向为 x , 其表达式为:

$$C_g A x + i(\bar{k} - a_0 k) + \frac{1}{2}(c_g)_x A + \frac{i}{\omega} \left(a_1 - b_1 \frac{\bar{k}}{k} \right) (cc_g A_y)_y - \frac{b_1}{\omega k} (cc_g A_y)_{yx} + \frac{b_1}{\omega} \left(\frac{k_x}{k^2} + \frac{(c_g)_x}{2kc_g} \right) (cc_g A_y)_y + \frac{i\omega k^2}{2} D |A|^2 A + \frac{f_r}{2} A \quad (2-3)$$

抛物线模型计算量比椭圆型为小, 可以用于较大水域的波浪传播和变形。杨振勇 (1992) 基于 Kirby 的抛物型方程理论 (PEM) 建立了波浪传播模型 PEM, 与物模试验比较表明, 抛物型缓坡方程模型可以在反射和非线性影响较小的情况下, 比较准确地计算波浪的折射、小角度绕射及浅水变形^[2]。由于 PEM 模型运算速度快, 很适合计算自外海至近岸或港口附近大范围的波浪传播变形。

1994 年 Bin li 用摄动法得到了一个依存于时间的抛物线方程^[20,21]。用交替方向法 (ADI 法) 求解, 数值方法无条件稳定, 与 1982 年 Berkhoff 得到的试验资料相比, 一致性很好^[17]。

2.3 双曲型缓坡方程

如上所述, 椭圆型缓坡方程因为解边值问题耗费大量机时, 只能用于小面积水域。抛物型模型虽大大地减少了计算量, 但忽略了反射波的影响, 因此不适于反射强烈的港内模型或离海墙较近的区域。Booij (1981) 给出了双曲型缓坡模型^[25], 方程形式如下:

$$\nabla(cc_g \nabla \eta) - \frac{c_g}{c} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (2-4)$$

Copeland (1985) 根据 Booij 给出的方程导出了用一对一阶方程表示的双曲型缓坡方程, 它没有忽略反射波, 而是根据波高和波向计算防波堤附近的反射、折射、绕射综合作用下的波动场。Copeland 的方程形式如下:

$$\nabla Q + \frac{c_g}{c} \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad (2-5)$$

$$\text{和} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + cc_g \nabla \eta = 0 \quad (2-6)$$

式中 Q ——流体质点速度的数值积分函数。

如果不在边界上用方程(2-5)和(2-6)计算自由表面位移 η , 可以不必知道 Q 的一般形式。如果假定

$$\nabla c_g = 0 \quad (2-7)$$

$$\text{则} \quad Q = c_g \eta \quad (2-8)$$

方程(2-8)为(2-5)和(2-6)的一个特解, 即为深水或水深均匀时 Q 关系式。

联立求解方程(2-5)和(2-6)可以得到周期波形式, 它的相位速度 $c^2 = \left(\frac{g}{k} \right) \tanh(kh)$, 并且遵循波运动守恒。

Copeland 用有限差分法求解方程(2-5)和(2-6), 缩短了求解边值问题的计算时间, 并且包括任意反射能量的内部边界。差分形式如下:

$$\eta_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \eta_{ij}^{t-\frac{\Delta t}{2}} - \left(\frac{c}{c_g} \right)_{ij} [Qx'_{i+1} - Qx'_{ij}] \frac{\Delta t}{\Delta x} - \left(\frac{c}{c_g} \right) [Qy'_{i,j+1} - Qy'_{ij}] \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (2-9)$$

$$Qx_{ij}^{t+\Delta t} = Qx_{ij}^t - (cc_g)_{ij} \left[\eta_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \eta_{i,j-1}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right] \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (2-10)$$

$$Qy_{ij}^{t+\Delta t} = Qy_{ij}^t - (cc_g)_{ij} \left[\eta_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \eta_{i,j-1}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \right] \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (2-11)$$

Copeland (1985) 用一对一阶方程表示的双曲型模型, 可以很好的计算短周期波在变浅水深和存在任意形状的反射边界下的传播, 此模型可灵活用于防波堤和港内模型^[26]。

2.5 缓坡方程的发展

近年来, 国内外许多学者对随机波的传播作了大量的研究, 提出了一些依存于时间的缓坡方程。Smith 和 Sprinks (1975) 用格林公式研究出了一个依存于时间的双曲型缓坡方程^[27]。Radder 和 Dingemans (1985) 提出了一个基于哈密尔顿表面波理论的依存于时间的缓坡方程的典型形式, 此模型可以化为 Smith 和 Sprinks 的方程形式^[28]。Kubo 等 (1992) 用泰勒级数展开推出了另一个依存于时间的缓坡方程形式^[29]。Kirby 和 Kubo (1992) 对方程的线性色散关系进行了验证, 并用 Radder 和 Dingemans 的方法和 Kubo 等的方法分别模拟了波群的传播^[30]。Nadaoka 等 (1994) 提出了一个依存于时间的非线性缓坡方程, 并指出它是对 Smith 和 Sprinks 方程的非线性扩展^[31]。

上述模型均假定地形为缓坡, 即 $\nabla h/kh \ll 1$ (∇ ——哈密尔顿算子; h ——水深; k ——波数), 因此 $O((\nabla h)^2)$ 和 $O(\nabla^2 h)$ 被忽略。Massel (1993) 用 Galerkin 特征函数法提出了一个包括底坡作用高阶项和一个无限小量的联合折、绕射模型^[32]。Chamberlain 和 Porter (1995) 提出了一个只包括底坡作用高阶项而不包括那个无限小量的改进的缓坡方程形式。Massel 以及 Chamberlain 和 Porter 都证明他们的方程可以应用于剧变的水底地形, 这是 Berkhoff 缓坡方程所不能做到的^[33]。最近, Kyung Dong Suh, Changhoon lee 和 Woo Sun Park 用格林公式和拉格朗日表示法, 也得到了两个等效的可以用于波浪在水底地形剧变情况下传播的依存于时间的缓坡方程, 方程既可用于规则波, 也可用于随机波^[34]。

由以上可见, 在国内外众多学者努力之下, 缓坡方程正在由缓变地形上线性谐波方程向剧变地形上随机波及非线性方向发展, 应用范围越来越宽。

3 Boussinesq 浅水短波模型

Boussinesq 浅水短波模型的理论基础是 Boussinesq 方程, 它由 x, y 两水平方向的动量守恒和连续性方程组成。Peregrine (1967) 推导出 Boussinesq 方程形式如下, 这一方程已成为进一步研究波浪问题的原形^[37]。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h+\eta)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h+\eta)v] = 0 \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = & \frac{1}{2} h \left[\frac{\partial^3 (hu)}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 (hv)}{\partial x \partial y \partial t} \right] \\ & - \frac{1}{6} h^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial t} \right] \end{aligned} \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2} h \left[\frac{\partial^3 (hv)}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 (hu)}{\partial x \partial y \partial t} \right]$$

$$-\frac{1}{6}h^2\left[\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t}\right] \quad (3-3)$$

式中 u, v ——分别对应于 x, y 方向的断面平均流速; h ——水深; η ——水面位移。

Abbott (1978, 1984) 从以上方程出发, 建立了 Boussinesq 浅水短波数学模型^[35,36]。模型采用等间距网格的差分法求解, 格式为 ADI 法。Boussinesq 模型用流速和水位来描述水体变化, 运动过程中保持动量守恒, 因此模型能够反映波浪的各种变形, 如浅水变形、折射、绕射、反射等。由于 Boussinesq 模型是非线性模型, 包括非线性色散和频率色散(弱非线性), 因此可以模拟波浪之间的相互作用, 研究诸如浅水域的波谱变形非常有效。另外 Boussinesq 模型对边界输入条件没有特殊要求, 因此可以模拟各种波形, 如规则波、频谱、方向谱、二阶长波等等。

Madsen 和 Warren (1984) 对 Abbott 建立的 Boussinesq 模型计算的浅水变形、折射、绕射和部分反射的结果与解析解(Madsen, 1983)和试验测量结果(Straub, 1956)作了比较, 得到了很好的一致性, 由此证明了此模型的可靠性和实用价值^[38]。

Boussinesq 模型基于浅水方程, 包括非线性色散和频率色散, 而频率色散是因为考虑了垂向速度沿水深呈线性分布(存在垂向加速度), 是弱频率色散, 所以只能用于较浅水域, 一般地 $h/L_0 \leq 0.22$ (h ——水深; L_0 ——深水波长)。为了使 Boussinesq 方程得到更广泛的应用, 迫切需要减少对水深的限制。Witting (1984) 将水平流速展开为泰勒级数, 并以自由水面流速为参数, 采用优化泰勒级数中的参数获得最佳线性色散项的办法, 得到了包括更高阶偏微分项的 Boussinesq 方程, 其结果适用于一维常水深情况^[39]。Madsen (1991) 详细考察了因使用不同流速参数所得到的不同形式的 Boussinesq 方程的色散性质, 并借鉴于 Witting 对于线性色散项所用的 Pade 近似, 提出在动量方程中引入附加三次偏微分项的办法, 来改善 Boussinesq 方程在深水区的色散性质, 将水深限制延伸到 $h/L_0 \leq 0.5$ 的过渡水深^[40]。1992 年 Madsen 又对该方程进行了改进, 使它包括水深的一阶导数, 即考虑底床坡度的影响, 方程形式如下:

$$S_t + P_x + Q_y = 0 \quad (3-4)$$

$$P_t + \left(\frac{P^2}{d}\right)_x + \left(\frac{PQ}{d}\right)_y + gdS_x + \Psi_1 = 0 \quad (3-5)$$

$$Q_t + \left(\frac{Q^2}{d}\right)_y + \left(\frac{PQ}{d}\right)_x + gdS_y + \Psi_2 = 0 \quad (3-6)$$

其中脚标 x, y, t 是关于空间和时间的导数, d 是总水深, h 是静水面深度, P 和 Q 是沿深度积分的速度分量, S 是波面高程, Ψ_1, Ψ_2 为对应于不同流速参数的色散项, 它们统一于下述形式:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -\left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(P_{xt} + Q_{yt}) - Bgh^3(S_{xxx} + S_{xyy}) \\ & - hh_x\left(\frac{1}{3}P_{xt} + \frac{1}{6}Q_{yt} + 2BghS_{xx} + BghS_{yy}\right) - hh_y\left(\frac{1}{6}Q_{xt} + BghS_{xy}\right) \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & -\left(B + \frac{1}{3}\right)h^2(Q_{yt} + P_{xt}) - Bgh^3(S_{yyy} + S_{xxy}) \\ & - hh_y\left(\frac{1}{3}Q_{yt} + \frac{1}{6}P_{xt} + 2BghS_{yy} + BghS_{xx}\right) - hh_x\left(\frac{1}{6}P_{yt} + BghS_{xy}\right) \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中 P 和 Q 式中 h_x, h_y 为 0 时, 即为 1991 年 Madsen 导出的水平底坡情况。式中 B 为一参数, 当 $B=1/15$ 时, Madsen (1992) 给出了该模型用于缓变地形的最佳近似方程, 使它可以应用于不规则波在缓变地形上从深水向浅水传播^[41]。

Okey Nwogu (1993) 用离静水面任意距离处的速度作为速度流量, 从连续性方程和欧拉运动方程出发, 导出了一组新的 Boussinesq 方程, 其最大特点是连续性方程中包含了流速的三次微分项。通过选取适当高度上的流速为参数, 可以提高方程的色散性质。并在研究中得出了以下结论: 在相对水深 $0 < h/L < 0.5$ 时, 以 $Za = -0.53h$ 处的流速为参数时, 方程所造成的流速误差将不大于 2%。Nwogu (1993) 指出该模型可用于规则波和不规则波在可变水深中的传播, 求解可以使用有限差分法。并且与试验结果作了比较, 证明其为一种实用的数学模型^[42]。

上述研究成果只限于不破碎区的计算。把 Boussinesq 方程扩展到破碎区, 需要两步: (1) 波浪破碎准则的引入; (2) 能量损失的引入。近几年来, Kobayashi 等 (1989)^[43], Karambas 等 (1992)^[45], Sato 等 (1992)^[44] 和 Schaffer (1992)^[46] 先后提出了几种基于 Boussinesq 方程的波浪破碎模式, 概括起来有两种方法, 一种是借助于数学方法在数学计算过程中引入数值粘性项, 如 Kobayashi 等 (1989)。另一种是在动量方程中引进动量修正项, 并通过拟和破碎区内波高衰减实测资料的办法, 来确定其中的参数, 建立起模型, 但在动量修正项的形式上各有差异, 其中为了简化计算以 $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的形式来处理波浪破碎的模型居多。对比 N-S 方程可以看出, 该项与水流粘滞作用造成的能量衰减项是一致的。Schaffer 提出了从非破碎波与破碎波之间的动量差梯度来估算动量修正项的办法, 破碎波的动量是通过假定一个具有一定尺度的位于破碎表面的滚动旋涡来估算的。从波浪破碎能量转化为紊动能而耗散的角度来看, 形为 $\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ 紊动耗散形式更为合理。这里最关键的问题是如何确定其中的紊动粘滞系数。近几年发展起来的各种紊动模型为我们运用 Boussinesq 型波动方程模拟波浪破碎提供了另一种解决波浪破碎的途径。随着计算机容量和速度的迅猛发展, 以求解紊动能量方程为基础来建立波浪破碎模型, 无疑具有广阔的发展前景。

Karambas 等 (1992) 采用了在波动方程中引入形为 $v_e \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的动量衰减项, 其中的涡旋粘滞系数 v_e 通过求解简化的紊流模式确定。在紊流模式中, 假定由于破碎区内前一个波对后一个波的影响, 紊动能量在空间上趋于均匀化, 因而方程中的对流项可忽略不计。紊动能量方程中的紊动源由波浪破碎引起的能量衰减提供。

Sato 等 (1992) 考虑到波浪破碎后动量剧烈变化的事实, 引入形为 $M_D = -v_e \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ 的动量修正项, 并参照渡边·丸山 (1986) 的研究成果, 确定式中的系数为 $v_e = \frac{\partial_D g d \tan \beta}{\omega^2} \sqrt{\frac{g}{d} \frac{\hat{Q} - Q_r}{Q_s - Q_r}}$, 式中, $\hat{Q}$ 为破波点处的流量振幅, Q_r, Q_s 如下式所示,

$$Q_r = 0.135 \sqrt{gd^3} \quad (3-9)$$

$$Q_s = 0.4(0.57 + 5.3 \tan \beta) \sqrt{gd^3} \quad (3-10)$$

Sato (1992) 还对比了该模式与渡边·丸山模式所得出的波形的差别, 认为前者较后者在波形

的模拟上更为合理^[3]。

陶建华(1984)用湍流模式结合窄缝技术模拟了波浪爬高和波浪破碎^[9]。

李绍武(1997)通过在 Boussinesq 方程中引入形为 $\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right)$ 的紊动项,提出了一种波浪破碎模型。从分析波浪破碎前后的能量变化入手,首次将破碎区内处于不同破碎阶段的单个波因破碎引起的波能损失作为紊动源项引入紊动能方程,通过求解紊动能方程 k 方程确定紊动粘滞系数。这种方法比起从周期平均量寻找关系的方法更如实地反映了波浪破碎过程。并且指出一般采用的型为 $v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 因具有流速的二阶空间导数,在用于不规则波时理论上是有缺陷的。该种模型仅适用于具有如下波形的波浪破碎变形的情况,即

$$\text{当 } Q_x, Q_y \geq 0 \text{ 时, } \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \leq 0 \quad (3-11)$$

$$\text{当 } Q_x, Q_y \leq 0 \text{ 时, } \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \geq 0 \quad (3-12)$$

这一条件对不规则波来说有时是不满足的。因为在静水面以上存在这样的情况,即

$$\text{当 } Q_x, Q_y \leq 0 \text{ 时, } \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \leq 0 \quad (3-13)$$

$$\text{当 } Q_x, Q_y \geq 0 \text{ 时, } \frac{\partial^2 Q_x}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Q_x}{\partial y^2} \geq 0 \quad (3-14)$$

此时动量的修正项的作用不是使波高衰减而是放大,从而使模型失效。

李绍武(1997)运用实验资料验证了模型模拟破碎前的浅水变形,减水效应,破碎后的波高变化及增水效应等情况。用实测资料验证了模型模拟不规则波,叠加谐波在破碎前后的波位变形和底流速变化。验证取得了满意的结果^[3]。

4 应用角谱模型计算波浪变形

自从 Booker 和 Clemmon (1950) 阐明平面波的角谱 (Angular Spectrum) 概念以来,已在处理波浪传播的各个方面得到应用。1983 年 Stamnes 等应用角谱模型研究在常水深中波浪的聚焦问题。Dalrymple 和 Kirby (1988) 针对线性波浪在等深线平行的平直海滩上的变形,发展了一个角谱模型^[50]。1989 年他们将这一方法推广到不规则水深区域。Suh 又于 1993 年将它发展应用于不规则波^[47]。俞聿修等 (1997) 采用角谱模型对规则波和多向不规则波在不同地形上和进入单口门港域时的折射和绕射问题进行了计算,并把计算结果与试验结果进行了比较。比较的结果表明:角谱模型能够快速有效地计算波浪的折射、绕射问题。图 2 为俞聿修计算

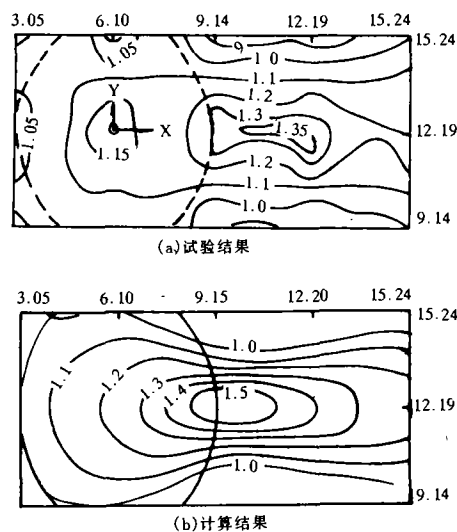


图 2 角谱模型波浪折射绕射系数等值线示意图

(a) 实验结果; (b) 计算结果

结果与试验结果的比较^[12]。

对于波浪运动,复波浪势 $\Phi(x,y)$ 与总速度势 $\varphi(x,y,z,t)$ 有关,

$$\varphi(x,y,z,t) = \Phi(x,y) \times \cosh[k(h+z)] \times \exp(-i\omega t) \quad (4-1)$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, ω 是波浪的角频率, h 是水深, 垂直坐标 z 的原点位于静水面上且垂直向上。假定波浪由 $x=0$ 处向 x 正半轴传播, $\Phi(0,y)$ 是 $x=0$ 处入射波的势。在 y 方向上 $\Phi(0,y)$ 的傅立叶变换:

$$\hat{\Phi}(0,\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(0,y) \exp(-i\lambda y) dy \quad (4-2)$$

其中上标 $\hat{}$ 代表变量的傅立叶变换, λ 是一个连续的傅立叶参数。反傅立叶变换为:

$$\Phi(0,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(0,\lambda) \exp(-i\lambda y) d\lambda \quad (4-3)$$

注意到单位振幅的平面波在 $k \equiv (\sqrt{k^2 - \lambda^2}, \lambda)$ 方向传播为 $\exp[i(\sqrt{k^2 - \lambda^2}x + \lambda y)]$, $\exp(i\lambda y)$ 可以看作是在 $x=0$ 处单位振幅平面波在该方向上的传播。从式(4-3)可以看出, 某个平面组成波的复振幅可以简单地看作是: $\frac{1}{2\pi} \hat{\Phi}(0,\lambda) d\lambda$ 。因此我们称 $\hat{\Phi}(0,\lambda)$ 为波浪场 $\Phi(0,y)$ 的角谱。角谱就是波浪场沿某一直线的傅立叶变换, 它的某个组成部分代表在某一方向上传播的平面波的复振幅。

在计算域的外边界 $x=0$, 入射波 $\eta(0,y,0)$ 沿 y 轴的傅立叶变换为其角谱 A_{ts} 。1993 年 Suh 导得不规则波在不规则地形上传播时的角谱计算式:

$$\begin{aligned} A_{ts_x} = & i \left[\sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} - \sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} \right] A_{ts} - \frac{[\sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} C_t C_{gt}]_x}{2 \sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} C_t C_{gt}} A_{ts} \\ & + i \frac{\omega_t k_t^2 h}{C_{gt} \sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} \sinh 2k_t \bar{h}} e^{-i \sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} x} \cdot F_s \left\{ v F^{-1} [A_{tm} e^{i \sqrt{k_{0t}^2 - (m\lambda)^2} x}] \right\} \\ & - i \frac{\omega_t^2 k_t^5 \bar{h}^2}{C_{gt}^3 [k_t^2 - (s\lambda)^2] \sinh^2 2k_t \bar{h}} E_{ts} e^{-i \sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} x} \\ & \cdot F_s \left\{ v F^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{k_t^2 - (m\lambda)^2}} F_m \{ v F^{-1} [A_{tm} e^{i \sqrt{k_{0t}^2 - (n\lambda)^2} x}] \} \right] \right\} \\ & + i \frac{\omega_t k_t^3 \bar{h}^2}{C_{gt} \sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} \sinh 2k_t \bar{h}} \left(\frac{C_t}{2} \tanh k_t \bar{h} + \frac{g}{\omega_t \cosh^2 k_t \bar{h}} \right) \\ & e^{-i \sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} x} F_s [v^2 F^{-1} (A_{tm} e^{i \sqrt{k_{0t}^2 - (m\lambda)^2} x})] \\ & + \frac{g e^{-i \sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} x}}{2 C_t C_{gt} \sqrt{k_t^2 - (s\lambda)^2} \cosh^2 k_t \bar{h}} F_s \left\{ \delta_x F^{-1} [\sqrt{k_t^2 - (m\lambda)^2} A_{tm} e^{i \sqrt{k_{0t}^2 - (m\lambda)^2} x}] \right. \\ & \left. + \delta_y F^{-1} [(m\lambda) A_{tm} e^{i \sqrt{k_{0t}^2 - (m\lambda)^2} x}] \right\} \\ & s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4-4)$$

总速度势和自由水面相对于静水面的位移可由下面两式得到:

$$\varphi(x,y,z,t) = \sum_t \sum_s \left\{ -\frac{ig}{2\omega_t} \frac{\cosh k_t (\bar{h} + z)}{\cosh k_t \bar{h}} A_{ts} e^{i[\sqrt{k_{0t}^2 - (s\lambda)^2} x + (s\lambda)y - \omega_t t]} + c, c \right\} \quad (4-5)$$

$$\eta(x, y, t) = \sum_l \sum_s \left\{ -\frac{A_{ls}}{2} e^{i[\sqrt{k_{0l}^2 - (s\lambda)^2} x + (s\lambda)y - \omega_l t]} + c.c. \right\} \quad (4-6)$$

由此,只要知道在外边界($x=0$ 处)的方向谱和模型域内的地形,便可以求出模型域内任一点的波浪场。角谱模型可用于计算波浪特别是多向不规则波在不同地形上和进入港域的折射、绕射,并且可以得到港域各处的方向谱。但角谱模型计算域形状为矩形,边界无反射或计算域很大;计算域内不能有出水物体存在;不能考虑波浪破碎和水流影响。

5 结 语

以上对港口海岸工程常见的和新兴的几种波浪变形数学模型作了介绍,得出以下几点结论:

a) 波向线法一般不考虑绕射和反射,计算量小,可以用于港外反射和绕射不显著的大面积开敞水域的计算。个别情况下绕射的影响也可以加以特殊考虑。但在海底坡度较大的情况下,波向线理论计算结果的偏差将较大;当水下地形更加复杂时,还会出现焦散和死区现象,致使这些区域的波高计算值严重失真。文中介绍的波谱折射的逆波向线法计算水底地形非常复杂时的波浪折射,可以有效地解决焦散和死区现象。同时计算中只考虑计算域中的一些代表点,大大减少了计算量。因此可以被开发用于复杂地形水域波浪场的分析研究。

b) 在缓坡方程的几种形式中,椭圆型模型由于求解椭圆型方程本身的困难和所用大量机时两方面的原因,这种模型很难也很少直接用于解决实际问题;抛物线型模型可以在反射和非线性影响较小的情况下,比较准确地计算波浪的折射、小角度绕射及浅水变形,且又由于运算速度快,很适合计算自外海至近岸或港口附近大范围的波浪传播变形;双曲型模型由于具有椭圆型模型的特点,即可以描述任意水深下波浪的折射和绕射联合变形,而且计算速度大大加快,因此得到广泛应用。它一般用来模拟港内模型中波浪自深水至浅水的变形。

原来缓坡方程一般用于水底地形坡度较平缓时线性谐波的变形,但在众多学者的努力之下,缓坡方程也开始用于地形变化较剧烈时,具有非线性影响和随机波情况。

c) Boussinesq 模型能够反映波浪的各种变形,如折射、绕射和反射等(甚至破碎也正在研究之中)。由于 Boussinesq 模型是非线性模型(弱非线性),如果波浪之间的各种非线性作用明显, Boussinesq 模型比较可靠。另外 Boussinesq 模型对边界输入条件没有特殊要求,因此可以模拟各种波形,如规则波、频谱、方向谱、二阶长波等等。Boussinesq 模型一般被用于港内模型的计算。

由于 Boussinesq 模型基于浅水方程,原来只能用于较浅水域($h/L_0 \leq 0.22$)。在众多学者努力之下,水深限制已开始逐渐放宽。

d) 角谱模型可用于计算波浪特别是多向不规则波在不同地形上和进入港域的折射、绕射,并且可以得到港域各处的方向谱。但角谱模型计算域形状为矩形,边界无反射或计算域很大;计算域内不能有出水物体存在;不能考虑波浪破碎和水流影响。

参考文献

- 1 杨振勇. 港口海岸工程波浪数学模型综述. 港工技术, 1995, (3): 1~6
- 2 杨振勇. 近岸海域波浪传播模型 PEM. 港工技术, 1992, (4): 38~42
- 3 李绍武. 近海、近岸地区波浪变形及波生流系统数学模型理论与应用. 天津大学博士论文, 1997
- 4 Abernethy C L and Gilbert G. Refraction of wave spectral. Report II 117, Hydraulics Research Station, Wallingford U. K., May 1975
- 5 Jelliman C E. Outray—A Wave Refraction model. Report No Ex 1561, Hydraulics Research Station, Wallingford U. K., Sep. 1987
- 6 钟正勇. 波谱折射的逆波向线模型及其在南黄海辐射沙洲水域的应用. 河海大学硕士论文, 1997
- 7 钟正勇, 张长宽. 南黄海海底辐射沙洲水域波浪场的分析推算. 第八届全国海岸工程学术讨论会论文集, 723~730
- 8 宋志尧, 钟瑚穗, 严以新 等. 开敞水域波浪折射变形数值计算. 第八届全国海岸工程学术讨论会论文集, 320~327
- 9 陶建华. 波浪在岸滩上爬高和破碎的数值模拟. 海洋学报, 1985, 6 (5)
- 10 洪广文, 冯卫兵, 夏期颐等. 缓变水深和流场水域波浪折射、绕射数学模拟. 第八届全国海岸工程学术讨论会论文集, 703~714
- 11 徐世凯, 王红川, 洪广文. 利用波能守恒方程研究波浪折射绕射的数学模型及数值模拟. 海洋工程, 1996, 14 (4): 38~44
- 12 俞聿修, 赖国璋, 尚春雨. 应用角谱模型计算多向不规则波浪的折射绕射. 第八届全国海岸工程学术讨论会论文集, 535~542
- 13 洪广文. 任意水深变化水域非线性波传播模型. 第八届全国海岸工程学术讨论会论文集, 519~526
- 14 Southgate H N. Refraction-Diffraction. Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, 1985, 111 (1)
- 15 Berkhoff J C W. Computation of combined refraction—diffraction. Proc. 13th Int Conf. on coastal Engineering, Vancouver, 1972
- 16 Berkhoff J C W. Mathematical models for simple harmonic linear water waves; Wave diffraction and refraction. Delft Hydraulics Laboratory. Publ. No. 163
- 17 Berkhoff J C W, Booij N and Radder A C. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves. Coastal Engineering, 1982, 6, 255~279
- 18 Radder A C. On the parabolic equation method for water wave propagation. J. Fluid Mech., 95, 159~176
- 19 Booij N. A note on the accuracy of the mild—slope equation, Coastal Engineering, 1983, 7, 191~203
- 20 Bin li. A generalized conjugate gradient model for the mild slope equation. Coastal Engineering, 1994, 23, 215~225
- 21 Bin li. An evolution equation for water waves. Coastal Engineering, 1994, 23, 227~242
- 22 Kirby J T. Rational approximation in the parabolic equation method for water waves. Coastal Eng., 1986, 10
- 23 Kirby J T. A parabolic equation for the combined refraction—diffraction of Stokes waves by mildly varying topography, J. F. M., 1983, 136, 453~466
- 24 Berkhoff J C W, et al. Verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, Coastal Eng., 1982, 6
- 25 Booij N. Gravity waves on water with non—uniform depth and current. Delft University of Technology, Report 81—1, 1981
- 26 Copeland G J M. A practical alternatives to the 'mild—slope' wave equation, Coastal Eng., 1985, 9, 125~149
- 27 Smiths R. and Sprinks T. Scattering of surface waves by a conical island. J. Fluid Mech., 1975, 72: 373~384
- 28 Radder A C and Dingemans M W. Canonical equation for almost periodic, weakly nonlinear gravity waves, Wave Motion, 1985, 7: 473~485
- 29 Kubo Y, Kotake Y, Isobe M. et al. Time—Dependent mild slope equation for random waves. In: Proc. 23rd Coastal Eng. Conf., Venice, 1992, 1, 419~431
- 30 Kirby J T, Lee C and Rasmussen C. Time—Dependent solutions of mild slope wave equation. In: Proc. 23rd Coastal Eng. Conf., Venice, 1992, 1, 391~404

- 31 Nadaoka K, Beji S and Nakagawa Y. A fully—dispersive nonlinear wave model and its numerical solutions. In: Proc. 24th Coastal Eng. Conf., Kobe, 1994, 1, 427~441
- 32 Massel S R. Extended refraction—diffraction equation for surface waves. Coastal Eng., 1993, 19: 97~126
- 33 Chamberlain P G and Porter D. The modified mild—slope equation. J. Fluid Mech., 1995, 291: 393~407
- 34 Suh K D, Lee C H and Park W S. Time—dependent wave equations on rapidly varying topography, 待发表
- 35 Abbott M B et al. On the numerical modeling of short waves in shallow water. J. Hydr. Res., 1978, 16, 173~201
- 36 Abbott M B et al. Accuracy of the short wave numerical models. J. Hydraulic Eng., 1984, 110 (10): 1287~1301
- 37 Peregrine D H. Long waves on a beach J. fluid Mech., 1967, 27, 815~827
- 38 Madsen P A and Warren I R. Performance of a numerical short—wave model, Coastal Eng., 1984, 8, 73~93
- 39 Witting J M. A unified model for the evolution of nonlinear water waves. J. Comput. Phys., 1984, 56: 203~236
- 40 Madsen P A, Murray R and Sorensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Coastal Eng., 1991, 15, 371~388
- 41 Madsen P A and Sorensen O R. A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics Part 2. A slowly—varying bathymetry. Coastal Eng., 1992, 18, 183~204
- 42 Nwogu O. Alternative form of Boussinesq equation for nearshore wave propagation. J. of Waterway, P., Cos., and Ocean Eng. 1993, 119 (6)
- 43 Kobayashi N et al. Wave transformation and swash oscillation on gentle and steep slope, in J. Geophys. Res., 94 (c1) 951~966
- 44 Sato S and Suzuki H., Prediction of near—bottom velocity in surf zone. Proc. of the Coastal eng. Conf. in Japan, 1990, 40, 386~390
- 45 Karambas T V et al. A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equation. Coastal Eng., 1992, 18, 1~19
- 46 Schaffer H A, Deigaard R and Madden. A two—dimensional surf zone model based on the Boussinesq Equations, Proc. 23rd Int. Conf. on Coastal Eng., 1992, 460~473
- 47 Suh K D, Dalrymple R A. Application of angular spectrum model to simulation of irregular wave propagation. J. of Waterway, P., Cos., and Ocean Eng, 1993, 119 (5)
- 48 Longuet—higgins. On the transformation of a continuous spectrum by refraction Proc. Camb. Phil. Soc. 1957, 53 (1): 226~229
- 49 Dorrestein R. Simplified method of determining refraction coefficients for sea waves. J. Geophys Res. 1960, (2): 637~742
- 50 Dalrymple R A et al. Models for very wide—angle water waves and wave diffraction. J. Fluid Mech., 1989, 201, 299~322

作者简介:黄凌燕,女,1971年10月17日生,1994年毕业于河海大学航运及海洋工程系,曾在天津港湾工程研究所从事科研工作,现为天津大学硕士研究生。主攻方向为波浪与建筑物相互作用,曾发表“开敞码头上部结构波浪上托力的试验研究”。

Development of Mathematical Models of Wave Transformation for Port and Coastal Engineering

Huang Lingyan, Liu Haiqing and li Yanbao

Department of Harbour and Coast Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072

Abstract The paper reviews some advanced mathematical models that can be used for description of wave climate in port and coastal engineering. It shows four types of mathematical models, which are (1) Wave ray refraction models (This paper introduces the ray method and the back-tracking ray refraction model of wave spectra); (2) Mild-slope equation wave model (This paper introduces three kinds of equation i. e. the elliptic mild-slope equation, the parabolic mild-slope equation and hyperbolic mild-slope equation); (3) Boussinesq wave models; (4) Angular spectrum model. This paper also describes the characteristics, application and development of these mathematical models.

Keywords ray method; Back-tracking ray refraction model; Mild-slope equation wave model; Boussinesq wave models; Angular spectrum model