

文章编号: 1003—6482(1999)04—0001—07

显式非线性弥散关系 在浅水波变形计算中的应用

李瑞杰¹ 王厚杰¹ 张萍萍²¹青岛海洋大学工程学院土木工程系, 青岛 266003²青岛大学师范学院物理系, 青岛 266071

摘 要

本文参照Zhao和Anastasiou的方法, 导出了逼近 Booij 的非线性弥散关系的近似显式表达式, 该式给出的结果与Booij的非线性弥散关系相当吻合。用中文显式非线性弥散关系, 结合含弱非线性效应的缓坡方程, 构成含非线性影响项缓坡方程的一个求解浅水波变形问题的方程组。用实验数据对本文模型进行验证, 结果表明, 显式非线性弥散关系在求解浅水波变形问题时, 给出了更符合实验数据的结果。

关键词: 浅水波; 非线性弥散关系; 显式非线性弥散关系; 缓坡方程

中图分类号: P731.22

文献标识码: A

一、前 言

对线性波弥散关系进行调整, 可逼近各种非线性波弥散关系。采用非线性波弥散关系解决实际问题, 有助于解决线性波动理论无法处理的一些非线性影响的问题, 因此得到广泛的研究, 如 Walker(1974, 1976), Hedges^[5], Booij(1981), Kirby和Dalrymple^[7], Dingemans^[4], Zhao和Anastasiou^[11], 李瑞杰等^{[2][8][9]}。Booij(1981)以 Walker(1974, 1976)提出的对波浪的弥散关系调整方法为基础, 参照Hedges^[5]的非线性弥散经验公式, 给出了一种对波浪的相速进行调整的非线性弥散关系, Booij(1981)认为该非线性弥散关系在浅水限制条件下, 精度与Walker的弥散关系相同, 但在较大水深时更接近于Stokes二阶波的弥散关系, Dingemans^[4]对Booij(1981)提出非线性弥散关系进行了讨论和验证, 得出与实测数据吻合很好的结果, 这证明Booij的非线性弥散关系具有较高的实用价值。非线性弥散关系在使用时, 由于含有振幅弥散项, 需要迭代求解, 很不方便, 为克服这个缺陷, 可以考虑用非线性弥散关系的近似显式表达式加以处理, 例如, Zhao和Anastasiou^[11]用显式表达式近似Kirby和Dalrymple^[7]非线性弥散关系。本文参照Zhao和Anastasiou^[11]的方法, 导出了逼近Booij(1981)的非线性弥散关系的近似显式表达式, 将该显式弥散关系表达式和

相应的非线性弥散关系进行比较,表明显式非线性弥散关系具有较高的精度,与 Booij 的非线性弥散关系相当吻合。用本文的显式非线性弥散关系与含非线性影响项的缓坡方程一起组成了一个求解浅水波变形问题的方程组。用 Berkhoff 等^[3]验证数学模型的可信性的实验进行验证计算,并将计算结果与采用线性波浪变形数学模型的计算结果进行了比较。结果表明,显式非线性弥散关系在求解浅水波变形问题时,可以有效地减少计算量。

二、非线性弥散关系的显式近似

许多学者用对线性波弥散关系进行简单调整的方法,以对线性波动理论进行适当的改进来讨论波浪传播中的非线性效应。首先使用这种方法的是 Walker(1974, 1976), Walker 建议将线性波相速乘以因子 $1 + \frac{1}{4} \frac{H}{h}$ 的方法用以讨论波浪的非线性效应,即波浪相速为

$$c = (1 + \frac{1}{4} \frac{H}{h}) c_1$$

上式中, c 为经过调整后的波速,即非线性波速, c_1 为线性波波速, H 为波高, h 为水深。Booij(1981)证明采用上述表达式与下面的弥散关系等价

$$\sigma^2 = gk(1 + \frac{1}{4} \frac{H}{h}) \tanh[k(h + \frac{1}{4} H)]$$

上式中, σ 为角频率, k 为波数, g 为重力加速度。Hedges(1976)采用另外一种略为不同的表达式描述弥散关系的非线性效应,具体表达式如下

$$\sigma^2 = gk \tanh[k(h + Z)]$$

式中 Z 为一个待定参数, Hedges 建议用 $Z \approx H$, Booij(1981)认为采用 $Z = H/2$ 更好。在浅水条件下,两者几乎给出相同的结果,但是在深水条件下,Booij 的表达式 $Z = H/2$ 给出的结果与 Stokes 二阶波理论的弥散关系相比较比 Hedges 的表达式 $Z = H$ 更为吻合,鉴于此,

Booij 建议采用下面的非线性弥散关系

$$\sigma^2 = gk \tanh[k(h + p, a)] \quad (1)$$

式(1)中 p 仍然是一个待定参数, a 为当地波浪振幅,采用这种形式的非线性弥散关系解释波浪传播中的非线性效应已被成功地用于波浪变形模型中^[2],特别是用这种简单的非线性弥散关系对 Berkhoff *et al.*^[3]水下椭圆形浅滩试验的验证计算中,证明采用该弥散关系求解浅水波变形是一种实用的方法。注意到当 $p = 1$ 时,可以得到

$$c = \sqrt{g(h + H/2)}$$

这里 $H = 2a$, 上式恰为浅水情况相速的表达式。事实上,在浅水情况下, $c = \sqrt{g(h + \zeta)}$,

该式中 ζ 是以波高的一半来量度的,即取 $\zeta = H/2$, 从而 $c = \sqrt{g(h + H/2)}$ 。对于孤立波的情

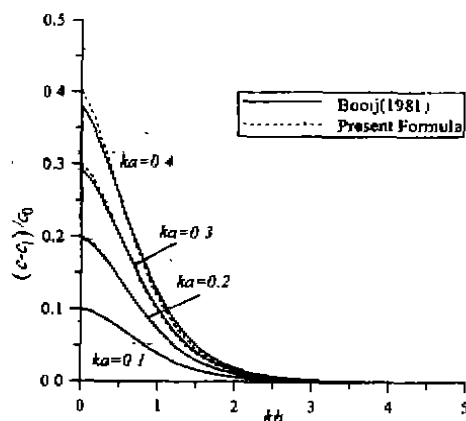


图1 式(6)和式(7)相对波速比较图

Fig. 1 Comparison of relative wave phase velocities of eqn (6) and eqn (7)

况, ξ 是以波高 H 来量度的, 此时 $c = \sqrt{g(h+H)}$ 。

用 c_0 表示深水相速, 可以得到

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \frac{c}{c_0} \quad (2)$$

于是线性波相速可以写成

$$\frac{c_l}{c_0} = \tanh(kh) \quad (3)$$

式(1)在计算时需要迭代求解, 很不方便, 为了克服这个缺点, 简化数值模型中的迭代计算, 参照Zhao和Anastasiou^[11]近似Kirby和Dalrymple^[7]的弥散关系的方法, 将式(1)写成下面的形式

$$\sigma^2 = gk \tanh kh + F_1 \frac{a}{h} + F_2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad (4)$$

显然上式中已将非线性项与线性项分离而成为显式表达式, 式中 F_1 和 F_2 可推导得出, 具体表达式如下

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= gk^2 h p \operatorname{sech}^2 kh \\ F_2 &= -gk^3 h^2 p^2 \tanh kh \operatorname{sech}^2 kh \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式(4)和式(5)即为本文的显式非线性弥散关系。式(4)中略去了含 a/h 三次方及其更高次方项。本文以下是根据Booij(1981)的建议取 $p = 1$ 进行讨论的

式(1)和(4)还可以根据式(2)分别写成下列的相速弥散关系

$$\frac{c}{c_0} = \tanh[k(h + p_a)] \quad (6)$$

$$\frac{c}{c_0} = \tanh kh + \frac{F_1}{gk} \frac{a}{h} + \frac{F_2}{gk} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \quad (7)$$

式(6)和式(7)中, F_1 和 F_2 由式(5)给出, 用物理量 $(c - c_l)/c_0$ 及式(3)可以对式(6)和式(7)进行比较。图1为式(6)与式(7)的相对波速比较图, 从图中可以看出, 两者吻合较好。

三、浅水波变形方程组

令 $F = F_1 \frac{a}{h} + F_2 \left(\frac{a}{h}\right)^2$, F_1 和 F_2 由式(5)给出, 则式(4)可以写成

$$\sigma^2 = \sigma_l^2 + F \quad (8)$$

式(8)中 $\sigma_l^2 = gk \tanh kh$ 为线性弥散关系, σ_l 为线性波浪频率。

已知显式非线性弥散关系的表达式就可以根据含非线性项的缓坡方程

$$\nabla \cdot (cc_s \nabla \eta) + (k^2 cc_s) \eta - F \eta = 0 \quad (9)$$

对波浪的传播特征进行求解。为方便起见, 式(9)中不含能量耗散项, 含能量耗散项的缓坡方程的处理方法参见Li和Wang^[9], 经数值计算表明, 缓坡方程中的能量耗散项, 对算例

地形几乎没有影响。式(9)中, η 为波动水面函数; c_g 为群速 $c_g = \frac{d\sigma}{dk}$ 。

采用行波假设, 令 $\eta = a(x, y)e^{iS(x, y)}$, 此处 $i = \sqrt{-1}$, 代入式(9)由虚部和实部分别得

$$\nabla \cdot [a^2(cc_g \nabla S)] = 0 \quad (10)$$

$$(\nabla S)^2 = k^2 + \frac{1}{cc_g a} [\nabla \cdot (cc_g \nabla a) - Fa] \quad (11)$$

由波浪位相函数梯度的无旋性可得

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla S \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial y} (\nabla S \cos \theta) = 0 \quad (12)$$

式(12)中, θ 为波向角; 式(10), (11)和(12)可以与线性弥散关系式(3)及适当的边界条件一起组成求解浅水波变形的方程组。如果在式(11)中, 忽略非线性弥散影响项, 即 $F=0$, 则相应地组成线性波浪变形方程组。

四、算 例

式(10)和(12)的分量表达式可以改写为下面的通式

$$\frac{\partial A}{\partial x} + P \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

如果 $A = \nabla S \sin \theta$, $B = \nabla S \cos \theta$, $p = -1$ 式(13)即为式(12); 如果 $A = a^2 cc_g \nabla S \cos \theta$, $B = a^2 cc_g \nabla S \sin \theta$, $P = 1$ 则式(13)即为式(10)。式(11)在 (i, j) 点离散, x 方向采用向前差商, y 方向采用中心差商, 可得相应的差分方程如下

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} - \frac{P \Delta x}{2 \Delta y} [(1-\alpha)(B_{i,j+1} - B_{i,j-1}) + \alpha(B_{i+1,j+1} - B_{i+1,j-1})] \quad (14)$$

式(14)中系数 $\alpha = 0.5$, Δx 和 Δy 为 x 和 y 方向的步长。对(14)式同样在 (i, j) 点离散, x 方向采用向前差商, y 方向采用中心差商, 二阶导数项均采用中心差商也可得相应的差分方程。

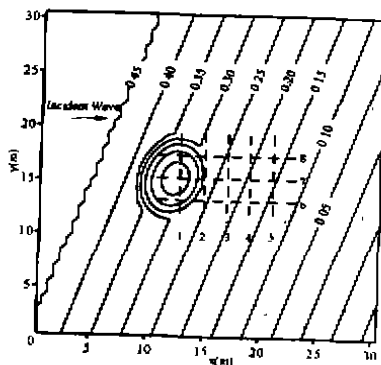


图2 试验水域和测点布置图

Fig. 2. Bathymetry and gauges layout of experiment by Berkhoff et al (1982);
Tidsecrets shown in dashed lines

在计算过程中, 首先依 Snell 定律和波振幅的变浅和折射效应将波向角和波振幅在每个网格点上赋值, 从而确定整个计算域的初值。然后离岸边界取深水值, 近岸用破波条件强制给出边界条件, 破波条件采用 $\alpha = 0.4k$ 给出。由式(14)从离岸边界向岸边界求解, 求出波高和波向角后再代回弥散关系和式(14)进行第二次迭代, 如此反复直到达到精度要求的迭代次数为止。

本文采用的地形为Berkhoff等[3]验证缓坡方程的不同计算方法可信性使用的地形, 地形及测点布置如图2所示。该地形的试验数据已经被广泛用于许多波浪变形数字模型的验证,

也被用于许多考虑有一定的非线性因素影响的波浪变形数学模型的验证, 如Dingemans^[4], Yoo^[10], Li和Wang^{[8][9]}等。该试验入射波振幅为0.0232m, 周期为1.0s, 详细试验数据参见Berkhoff^[4]。计算时步长取为 $\Delta x = \Delta y = 0.5\text{m}$ 。

图3——图6中, “●●●”为试验值, “- - -”为线性模型计算值, “——”为本文模型计算值。图3——图6绘出了用线性波变形模型和本文的浅水波变形模型进行计算时, 几个典型断面的相对波高计算值与试验值对比图。从图3——图6的计算结果可以看出: 采用线性波浪变形模型与试验数据误差较大, 特别是在浅滩附近更是如此, 而采用本文模型的计算结果则与试验数据更吻合, 从图4和图6可以看出, 本文模型的计算结果较线性波模型有明显的改善。

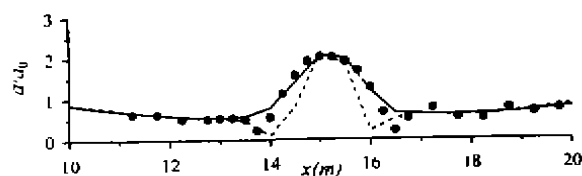


图3 断面4 相对波振幅对比图

Fig. 3 Comparison of relative wave amplitude ratio at transect 4

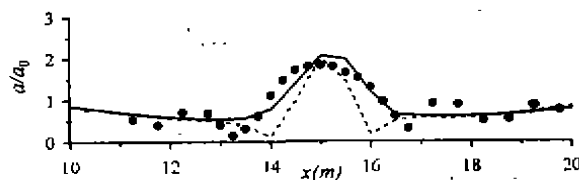


图4 断面5 相对波振幅对比图

Fig. 4 Comparison of relative wave amplitude ratio at transect 5

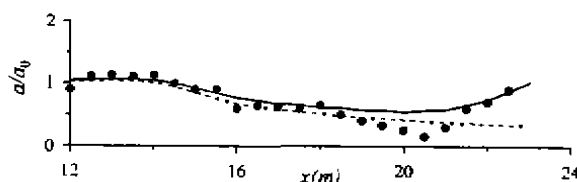


图5 断面6 相对波振幅对比图

Fig. 5 Comparison of relative wave amplitude ratio at transect 6

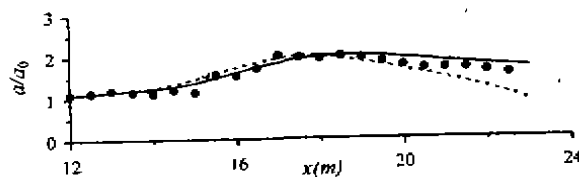


图6 断面7 相对波振幅对比图

Fig. 6 Comparison of relative wave amplitude ratio at transect 7

五、结 语

本文根据 Booij (1981) 的非线性弥散关系导出了相应的近似显式非线性弥散关系。该显式弥散关系与 Booij 的非线性弥散关系吻合较好。文中的模型实用上简便易行。从计算结果可以看出直接采用显式非线性弥散关系求解浅水波变形问题避免了采用 Booij 的非线性弥散关系求解所带来的多次迭代的问题, 是一种可行实用的方法。

文中的浅水波变形模型中含有行波假设且未涉及水流对波浪的影响, 这此因素必然会对计算结果产生一定的影响。

参 考 文 献

- 1 李瑞杰, 魏守林, 王亮, 近岸水域波浪变形数学模型, 海洋工程, 1998, 16(4), 48—54。
- 2 李瑞杰, 魏守林, 王亮, 非线性效应对浅水水波变形的影响, 海洋湖沼通报, 1998, No. 1, 1—5。
- 3 Berkhoff, J. C. W, Booij, N., and Radder, A. C. Verification of Numerical wave Propagation Models for Simple Harmonic Linear Water Waves. *Coastal Eng.* 1982 6 255—279.
- 4 Dingemans, M. W. Directional Nearshore Wave Propagation and Induced Currents. *Proc. 20th Int. Conf. On Coastal Engng.*, Taipei, 1986, 1178—1191.
- 5 Hedges, T. S., An Empirical Modification to Linear wave Theory. *Proc. Inst. Civil. Eng., Part 2*, 1976, 65, 685—692.
- 6 Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A., Verification of Parabolic Equation for Propagation of Weakly Nonlinear waves, *Coastal Engineering*, 1984, 8, 219—232.
- 7 Kirby, J. T. and Dalrymple, R. A., An Approximate Model for Nonlinear Dispersion in Monochromatic Wave Propagation Models, *Coastal Engineering*, 1986, 9, 545—561.
- 8 Li Ruijie and Wang Houjie, Nonlinear Effect of Wave Propagation in Shallow Water, *China Ocean Engineering*, 1999, No. 1, 109~114.
- 9 Li Ruijie and Wang Houjie, A Modified Form of Mild-slope Equation with Weakly Nonlinear Effect, *China Ocean Engineering*, 1999, (To be published)
- 10 Yoo, D. & O'Connor, B. A. Diffraction of waves in caustics, *J. Wtrwy., port, Coast. and Oc. Engrg.* ASCE, 1988. 114(6):751—731.
- 11 Zhao, Y. and Anastasiou, K., Economical Random Wave Propagation Modelling Taking into Account Non-linear Amplitude Dispersion., *Coastal Engineering*. 1993(20). 59—83.

APPLICATION OF A NONLINEAR EXPLICIT DISPERSION RELATION TO SHALLOW—WATER WAVE TRANSFORMATION

LI Rui-jie¹ WANG Hou-jie¹ ZHANG Ping-ping²

(¹Civil Engineering Department of Engineering College
of Ocean University of Qingdao, Qingdao, 266003

²Department of Physics of Normal College of Qingdao
University, Qingdao, 266071)

Abstract

An explicit nonlinear formulation in terms of the method of Zhao and Anastasiou is presented to approximate the dispersion relationship suggested by Booij (1981). The present explicit expression is in good agreement with the original empirical formula of Booij. Using this expression and the mild slope equation with weak non-linearity, a mathematical model for shallow-water wave transformation is developed. The model is tested against the laboratory data. Compared with those obtained through a linear model excluding the effect of non-linearity, the computation results show that the present model is rational and in good agreement with experimental data.

Key word: Shallow-water wave, nonlinear dispersion relation, explicit non-linear dispersion relation, mild slope equation