文章编号:1005-9865(2001)01-0024-08

一种推广的缓坡方程

潘军宁[1], 洪广文[2], 左其华[1]

(1. 南京水利科学研究院,江苏 南京 210024; 2. 河海大学,江苏 南京 210098)

摘 要:从流体力学基本方程出发,假定水流的涡量和垂向流速分量为小量,推导出考虑非均匀水流的推广的缓坡方程,该方程中包含了$\nabla_h^2 h$项和$(\nabla_h h)^2$项。在方程中引入底摩擦项、风能输入项和非线性项,其中风能输入项的推导考虑了风浪与涌浪的区别,风浪情况依据青岛海洋大学的风浪成长经验关系,涌浪情况依据Snyder等人的观测结果。经过上述推广后,得到综合考虑折射、绕射、反射、非均匀水流、底摩擦损耗、风能输入及波浪非线性的推广的缓坡方程。

关键词:波浪;缓坡方程;底摩擦;风能输入;波浪非线性

中图分类号:P731.2 **文献标识码**: A

An extended mild-slope equation

PAN Jun-ning[1], HONG Guang-wen[2], ZUO Qi-hua[1]

(1. Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China; 2. Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: By assuming that the vortex of current is small and that the current velocity is constant along vertical direction, a mild-slope equation for wave propagation on non-uniform flow is deduced from basic hydrodynamics equations and the terms of $\nabla_h^2 h$ and $(\nabla_h h)^2$ are included in the equation. The terms describing the effects of bottom friction, wind input and wave nonlinearity are also introduced into the equation. The wind input functions for wind waves and swells are separately considered by adopting Qindao Ocean University's empirical formula for wind waves and Snyder's observation results for swells. Thus, an extended mild-slope equation is obtained, in which the effects of refraction, diffraction, reflection, current, bottom friction, wind input and wave nonlinearity are considered comprehensively.

Key words: wave; mild-slope equation; bottom friction; wind input; wave nonlinearity

外海波浪传入近岸浅水地区时,受地形和结构物的影响,将会出现变浅、折射、绕射、反射等现象。此外,长距离传播的波浪还会因底摩擦等因素而导致波能衰减;在风场的作用下,风能的输入可能导致波高较小区域(如绕射区)内波浪进一步成长;当水深较浅时,波浪的非线性效应会变得相当显著,以致明显地影响到波浪的传播变形。研究综合考虑上述多种因素的波浪数学模型对海岸和港口工程具有重要意义。

基于小振幅波和缓坡的假定,对三维势流方程沿水深积分,可导出联合折射、绕射的平面二维波浪方程—缓坡方程[1,2],其定常形式如下:

$$\nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Psi) + k^2 CC_g \Psi = 0 \tag{1}$$

其非定常形式可写为[3]

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + (\omega^2 - k^2 CC_g)\Phi = 0 \tag{2}$$

以上两式中C、C_g分别为波速和波群速;$\Phi(x,y,t)$、$\Psi(x,y)$为波势;k为波数,ω为波浪角频率;∇_h为水平梯

收稿日期:2000-05-30

作者简介:潘军宁(1970—),男,江苏南京人,工程师,主要从事港口工程与海岸工程数学模型研究.

度算子。缓坡方程能够模拟任意水深下小振幅波浪的变浅、折射、绕射及反射等现象，但没有考虑底摩擦、水流、波浪非线性、风能输入等因素的影响。为了在方程中考虑更多因素的影响，一些作者从不同角度对缓坡方程作了推广和改进[3~8]。

Booij[3]首先在缓坡方程中引入底摩擦因子，Dalrymple[4]、左其华等[5]和洪广文[6]分别推导出不同形式的底摩擦因子计算公式，这些工作使缓坡方程可应用于摩阻地形上的波浪计算。

针对波浪在水流中的传播变形，Booij[3]、Liu[7]、Kirby[8]分别提出考虑缓变水流的非定常缓坡方程。三位作者得到的方程形式互有差别，其中Kirby的缓坡方程表达形式较为正确，但没有区别折射与联合折射、绕射波数的不同，Booij和Liu的模式区别了折射与联合折射、绕射的不同，但缓坡方程的形式及频率公式表达得不够准确。洪广文[9]按照经典线性波浪理论和变分原理推导出非均匀水流缓坡方程，修正了频率表达式，并正确区分了折射波数矢和联合折射、绕射波数矢。洪广文[9]、左其华等[10]还在非均匀水流缓坡方程中分别引入了形式不同的波、流共存时底摩擦因子计算公式。

为考虑近岸地区的波浪非线性效应，Hedges[11]提出了一个改进的弥散关系式。Kirby & Dalrymple[12]推导出包含非线性项的抛物型方程，这一非线性项的作用实际上相当于在抛物型方程中采用非线性Stokes波的弥散关系。由于Stokes波理论对浅水区不适用，Kirby & Darrymple[13]综合Hedges的结果提出一个适用于任意水深的弥散关系式，其在深水中渐近于Stokes波理论的弥散关系，在浅水中渐近于孤立波的弥散关系。利用这一弥散关系，Kirby & Dalrymple对缓坡方程进行非线性修正，得到了与实验资料相当符合的计算结果。

在缓坡方程的推导过程中，根据缓坡假定略去了$(\nabla_h h)^2$项和$\nabla_h^2 h$项(h为水深)[2]。但在某些情况下，如水底存在沙波和沙丘时，忽略这些项将导致明显的计算误差。Kirby[14]考虑了水下沙波的影响，推导出适用于沙波地形的波浪折射－绕射方程，该方程比式(2)多出包含沙波高度的一项。Massel[15]、Chamberlain & Porter[16]、Zhang & Edge[17]和Chandraskera & Cheung[18]等人采用不同方法分别推导出含有$\nabla_h^2 h$项和$(\nabla_h h)^2$项的更完整的折射－绕射方程，在推导过程中不作缓坡假定，但需要假定波浪势函数沿垂向分布和平底时相同。这一假定仅在底坡较缓时近似成立，因此这种折射－绕射方程仍然受底坡限制，可看作缓坡方程的一种推广形式。

如上所述，推广和改进缓坡方程的研究工作在许多方面已有进展，但目前尚未提出一个综合考虑多种因素的缓坡方程。而且，在缓坡方程的研究中很少考虑风对波浪的影响，实际上大风大浪往往相伴而来，在波浪传播过程中风起着重要作用。本文将在前人工作基础上，推导出一个包括底摩擦、风能输入、波浪非线性及非均匀水流等多种因素影响的推广的缓坡方程。

1　非均匀流场中波动问题的控制方程

无水流时重力场中的水波运动可近似作为理想不可压缩流体的势流运动来处理，一些作者[8]在推导非均匀流场中的缓坡方程时也从势流理论出发。本文将水流和波浪分开考虑，不预先假定水流有势，直接从流体力学基本方程出发推导非均匀流场中的缓坡方程。

合成流场应满足下列流体力学基本方程：

连续性方程
$$\nabla\cdot\vec{U}=0 \tag{3}$$

运动方程(兰姆型方程)
$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\nabla\left(\Pi+\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}\vec{U}\cdot\vec{U}\right)=\vec{U}\times\vec{\Omega}+v\nabla^2\vec{U} \tag{4}$$

自由面边界条件为：

1)动力学边界条件
$$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\nabla\left(\Pi+\frac{1}{\rho}P+\frac{1}{2}\vec{U}\cdot\vec{U}\right)=\vec{U}\times\vec{\Omega}+v\nabla^2\vec{U},z=\eta(x,y,t) \tag{5}$$

2)运动学边界条件
$$\eta_t+u\eta_x+v\eta_y-w=0,z=\eta(x,y,t) \tag{6}$$

水底边界条件为：
$$uh_x+vh_y+w=0,z=-h(x,y) \tag{7}$$

以上各式中,x,y 为平面坐标,z 轴原点在静水位处,以竖直向上为正,$\vec{U}=(u,v,w)$ 为流速矢,ρ 为水的密度,v 为水的运动粘性系数,P 为压强,$\Pi=gz$ 为重力势函数,g 为重力加速度,$\eta(x,y,t)$ 为自由表面高度,$h(x,y)$ 为水深,$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$,小写下标表示对函数求偏导数。

假定流场事先已经存在,并且忽略波浪对水流的影响,则水流应满足连续性方程和运动方程:

$$\nabla\cdot\vec{U}_0=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial\vec{U}_0}{\partial t}+\nabla(\Pi+\frac{1}{\rho}P_0+\frac{1}{2}\vec{U}_0\cdot\vec{U}_0)=\vec{U}_0\times\vec{\Omega}_0+v\nabla^2\vec{U}_0 \tag{9}$$

及相应的边界条件

$$\frac{\partial\vec{U}_0}{\partial t}+\nabla(\Pi+\frac{P_0}{\rho}+\frac{1}{2}\vec{U}_0\cdot\vec{U}_0)=\vec{U}_0\times\vec{\Omega}_0+v\nabla^2\vec{U}_0,z=\eta_0(x,y,t) \tag{10}$$

$$\eta_{0t}+u_0\eta_{0x}+v_0\eta_{0y}-w_0=0,z=\eta_0(x,y,t) \tag{11}$$

$$u_0\cdot h_x+v_0\cdot h_y+w_0=0,z=-h(x,y) \tag{12}$$

此外,对水流有静水压强条件

$$P_0=\rho g(\eta_0-z) \tag{13}$$

以上各式中 $\vec{U}_0=(u_0,v_0,w_0)$ 为水流流速,$\Omega_0=\nabla\times\vec{U}_0$ 为水流涡量,P_0 为水流压强,$\eta_0(x,y,t)$ 为水流引起的水位变化。

当波浪在非均匀流场中传播时,水质点速度 $\vec{U}$ 由波动速度 $\vec{V}$ 与水流速度 $\vec{U}_0$ 叠加而成。假定波浪存在速度势函数 $\varphi(x,y,z,t)$,以 ζ 表示波动水位,有如下关系:

$$\vec{U}=\vec{V}+\vec{U}_0 \tag{14-1}$$

$$\eta=\zeta+\eta_0 \tag{14-2}$$

$$\vec{V}=\nabla\varphi \tag{14-3}$$

$$\nabla\times\vec{V}=\nabla\times(\nabla\varphi)=0 \tag{14-4}$$

$$\nabla^2\vec{V}=\nabla^2(\nabla\varphi)=\nabla(\nabla^2\varphi)=0 \tag{14-5}$$

将式(8)~(14)代入方程(3)、(4)和边界条件(5)~(7),可将它们改写为:

连续性方程

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{15}$$

运动方程

$$\nabla\{\frac{P}{\rho}+\frac{D\varphi}{Dt}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+g(z-\eta_0)\}=\vec{V}\times\vec{\Omega}_0 \tag{16}$$

自由表面动力学条件

$$\nabla\{\frac{D\varphi}{Dt}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+g\zeta\}=\vec{V}\times\vec{\Omega}_0,z=\zeta+\eta_0 \tag{17}$$

自由表面运动学条件

$$\frac{D\zeta}{Dt}+\nabla_h\varphi\cdot\nabla_h\zeta-\varphi_z=0,z=\zeta+\eta_0 \tag{18}$$

水底边界条件

$$\nabla_h\varphi\cdot\nabla_h h+\varphi_z=0,z=-h(x,y) \tag{19}$$

式中 $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{U}_0\cdot\nabla$,$\nabla_h=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$。在式(18)的推导过程中略去了高阶小量 $\nabla_h\varphi\cdot\nabla_h\eta_0$。

式(16)、(17)等号右边项一般不为0,为方便计算,假定 $\vec{\Omega}_0$ 为小量,将等号右项略去。再假定垂向流速分量 $w_0\ll1$,结合 $\vec{\Omega}_0\ll1$ 可得 $u_{0_z}\ll1$,$v_{0_z}\ll1$,$v_{0_x}-u_{0_y}\ll1$,即垂向流速、水平流速沿水深变化量均为小量,水流可近似表示为平面二维流动,并且二维流动的涡量亦为小量。为表示方便,将 z 轴原点由静水位移至 η_0 处,即作变换 $z'=z-\eta_0$,则自由面高度为 ζ,水底高度为 $-(h+\eta_0)$,以下将 $h+\eta_0$ 记为 h,z' 记为 z,这样式(16)、(17)可改写为

$$\frac{P}{\rho}=-\{\frac{D\varphi}{Dt}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+gz-C(t)\} \tag{16'}$$

$$\frac{D\varphi}{Dt}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+g\zeta=C(t),z=\zeta \tag{17'}$$

如令 $\tilde{\varphi}=\varphi-\int_0^t C(t)\mathrm{d}t$，可约去式(16′)、(17′)中的 $C(t)$，故本文以下各式中不再显含 $C(t)$。

将式(17′)代入式(18)中消去 ζ 可得：

$$g\varphi_z+\frac{D^2\varphi}{Dt^2}+\{\frac{1}{2}\frac{D}{Dt}(\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi)+\nabla_h\varphi\cdot\nabla_h[\frac{D\varphi}{Dt}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2]\}=0,z=\zeta \tag{20}$$

按小振幅波假定设 $\varepsilon=ka$ 为小量，上式大括号的非线性项至少为二阶小量，在线性波理论中将被略去，即

$$g\varphi_z+\frac{D^2\varphi}{Dt^2}=0,z=\zeta \tag{21}$$

当考虑流速沿水深不变的平面二维流场时，$\vec{U}_0$ 在竖直方向上的分量为0，上述各式中 $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{U}_0\cdot\nabla_h$。方程(15)与边界条件(19)、(21)构成了非均匀流场中线性波理论的控制方程。

在海底水平、水流均匀的情况下，单频线性波的解可表示为：

$$\varphi=f(z)\Phi(x,y,t) \tag{22}$$

$$\Phi=-\frac{iga(x,y)}{\sigma}e^{iS(x,y,t)}=\mathrm{Re}\Phi+\mathrm{Im}\Phi=\Phi_1+i\Phi_2 \tag{23}$$

式中，a 为波浪振幅，S 为相位。如令 ω 为波浪绝对角频率，σ 为波浪相对角频率，$\vec{K}$ 为波数，则有如下关系

$$\omega=-\frac{\partial S}{\partial t},\quad \sigma=-\frac{DS}{Dt},\quad \vec{K}=\nabla_h S \tag{24}$$

$$\omega=\sigma+\vec{K}\cdot\vec{U}_0 \tag{25}$$

将式(22)代入方程(15)分离变量可得

$$\frac{f_{zz}}{f}=-\frac{\nabla_h\Phi}{\Phi}=k^2 \tag{26}$$

在水平海底条件下，水底边界条件化为

$$f_z=0,\qquad z=-h \tag{27}$$

由式(26)并结合边界条件(27)可解得

$$f=\frac{\mathrm{ch}k(h+z)}{\mathrm{ch}kh} \tag{28}$$

将式(22)、(23)代入自由面边界条件式(21)可得到如下关系

$$gf_z-f\sigma^2=0,z=0 \tag{29}$$

将式(28)代入式(29)可得

$$\sigma^2=gk\mathrm{th}kh \tag{30}$$

此式即为弥散关系，在水深与流场均匀时 $k=|\vec{K}|$。

2 波浪共同作用时的缓坡方程

在水深、水流缓变的情况下，式(28)与式(30)仍近似满足，但 k 与 $|\vec{K}|$ 一般不相等。这时式(22)应改写为

$$\varphi=f(h,z)\Phi(x,y,t) \tag{31}$$

由格林公式

$$\int_{-h}^{\zeta}(f\varphi_{zz}-\varphi f_{zz})\mathrm{d}z=(f\varphi_z-\varphi f_z)|_{-h}^{\zeta} \tag{32}$$

依据连续性方程可将式(32)改写为：

$$\int_{-h}^{\zeta}(f\nabla_h^2\varphi+f\nabla_h\cdot\vec{U}+\varphi f_{zz})\mathrm{d}z=-(f\varphi_z-\varphi f_z)|_{-h}^{\zeta} \tag{33}$$

将式(31)代入上式可得：

$$\int_{-h}^{\zeta}(f^2\nabla_h^2\Phi+ff_{zz}\Phi+2f\nabla_h f\cdot\nabla_h\Phi+f\nabla_h^2 f\Phi+f\nabla_h\cdot\vec{U})\mathrm{d}z=-f^2\Phi_z|_{-h}^{\zeta} \tag{34}$$

由式(28)可得以下结果：

$$\int_{-h}^{\zeta} f\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{th}kh}{k} + \zeta \tag{35}$$

$$\int_{-h}^{\zeta} f^2\mathrm{d}z = \frac{1}{g}(CC_g + \zeta) \tag{36}$$

$$\int_{-h}^{\zeta} ff_{zz}\mathrm{d}z = \frac{k^2}{g}(CC_g + \zeta) \tag{37}$$

$$\int_{-h}^{\zeta} 2f\nabla_h f\mathrm{d}z = \frac{1}{g}\nabla_h(CC_g + \zeta) - \nabla_h\zeta - f^2\nabla_h h|_{z=-h} \tag{38}$$

根据边界条件(19)、(21)可得：

$$-f^2\Phi_z|_{-h}^{\zeta} = \frac{1}{g}(\frac{\mathrm{D}^2\Phi}{\mathrm{D}t^2} + \sigma^2\Phi) - (f\nabla_h f\cdot\nabla_h h\Phi + f^2\nabla_h\Phi\cdot\nabla_h h)|_{z=-h} \tag{39}$$

将式(35)～(39)及边界条件(17′)代入方程(34)，略去$O(\varepsilon^2)$项后可得：

$$\frac{\mathrm{D}^2\Phi}{\mathrm{D}t^2} + \frac{\mathrm{D}\Phi}{\mathrm{D}t}\nabla_h\cdot\vec{U} - \nabla_h\cdot(CC_g\nabla_h\Phi) + (\sigma^2 - k^2CC_g)\Phi = g(\int_{-h}^{0} f\nabla_h^2 f\mathrm{d}z + f\nabla_h f\cdot\nabla_h h|_{z=-h})\Phi \tag{40}$$

该式即为二维非均匀水流中波浪传播的控制方程，在式中略去等号右边项后即化为 Kirby 提出的缓坡方程[8]。对无水流影响的定常波场，式(40)可简化为

$$\nabla_h\cdot(CC_g\nabla_h\Phi) + k^2CC_g\Phi = -g(\int_{-h}^{0} f\nabla_h^2 f\mathrm{d}z + f\nabla_h f\cdot\nabla_h h|_{z=-h})\Phi \tag{41}$$

依据缓坡假定($\delta=\frac{1}{kh}|\nabla_h h|\ll 1$)略去等号右边项，即得到定常缓坡方程式(1)。Zhang & Edge 计算了无水流时等号右边项的具体形式[17]，存在水流时该项的表达式基本不变，可表示如下：

$$g(\int_{-h}^{0} f\nabla_h^2 f\mathrm{d}z + f\nabla_h f\cdot\nabla_h h|_{z=-h})\Phi = gG\Phi \tag{42}$$

式中： $G = \alpha_1 k(\nabla_h h\cdot\nabla_h h) + \alpha_2\nabla_h^2 h + \alpha_3\nabla_h k\cdot\nabla_h h/k + \alpha_4\nabla_h^2 k/k^2 + \alpha_5(\nabla_h k\cdot\nabla_h k)/k^3$，

$$\alpha_1 = -p(1-p^2)(1-pq)$$

$$\alpha_2 = -pq(1-p^2)/2$$

$$\alpha_3 = q(1-p^2)(2p^2q - 5p/2 - q/2)$$

$$\alpha_4 = q(1-p^2)(1-2pq)/4 - p/4$$

$$\alpha_5 = q(1-p^2)(4p^2q^2 - 4q^2/3 - 2pq - 1)/4 + p/4$$

式中：$p=\mathrm{th}kh$，$q=kh$。由式(42)可知，只有当$(\nabla_h h)^2$、$(\nabla_h k)^2$、$\nabla_h h\cdot\nabla_h k$、$\nabla_h^2 h$和$\nabla_h^2 k$等各项均为小量时才能略去式(40)等号右边项。本文在推导式(40)过程中没有假定$\delta\leqslant 1$，但需假定式(28)成立，而该式仅在缓坡情况下成立，故仍称式(40)为缓坡方程。

如不存在水流，角频率$\sigma=\mathrm{const}$，则G可简化为

$$G = f_1\nabla_h^2 h + kf_2(\nabla_h h)^2 \tag{43}$$

式中： $f_1 = \alpha_2 + \frac{\alpha_4\beta_1}{q}$，$f_2 = \alpha_1 + \frac{\alpha_3\beta_1}{q} + \frac{\alpha_4\beta_2}{q^2} + \frac{\alpha_5\beta_1^2}{q^2}$，$\beta_1 = -q(1-p^2)/\gamma$

$$\beta_2 = 2q^2(1-p^2)(\gamma-\alpha_1)/\gamma^3，\gamma = p + q(1-p^2)$$

文献[1]、[2]在推导无水流缓坡方程时均利用缓坡假定将$\nabla_h^2 h$和$(\nabla_h h)^2$项略去。近年来不少文献[15~18]讨论了无水流情况下该项的影响，认为保留该项可提高计算的精度，尤其是对于水底存在沙波等起伏较大的地形。研究表明，保留$\nabla_h^2 h$项可提高缓坡方程计算沙波地形上波浪传播的精度，保留$(\nabla_h h)^2$项可改善缓坡方程对较陡水底的适用性。就水底反射系数而言，缓坡方程在坡度小于 1∶3 时可以得到满意的结果[19]，而保留$\nabla_h^2 h$和$(\nabla_h h)^2$项的推广缓坡方程的计算结果在坡度大于 3∶1 时仍与三维模型符合良好[15]。当有水流影响时，由式(25)和弥散方程式(30)可知，波数k不仅和水深h有关，而且与流速$\vec{U}$有关，即使$\delta\ll 1$也不能

忽略式(40)等号右边项，因此本文在缓坡方程中保留该项。

除上述格林公式法外，推广的非均匀水流缓坡方程还可采用文献[9]所述的变分原理推导得出，这里不再详述。

3 进一步推广的缓坡方程

对非均匀水流缓坡方程式(40)作进一步推广，以考虑水底摩擦损耗、水面风能输入以及非线性弥散关系的影响。

3.1 源函数项

将式(23)代入缓坡方程式(40)，可分离出虚部

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot\left[A(\vec{U}+\frac{CC_g\vec{K}}{\sigma})\right]=0 \tag{44}$$

式中：$A=\frac{a^2}{\sigma}$，该式为波浪与外界没有能量交换时的波作用守恒方程。如存在底摩擦损耗及风能输入，则式(44)中应增加源函数项，可改写为

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\nabla\cdot\left[A(\vec{U}+\frac{CC_g\vec{K}}{\sigma})\right]=\widetilde{F}_1+\widetilde{F}_2 \tag{45}$$

$\widetilde{F}_1$ 为能量损耗项，$\widetilde{F}_2$ 能量输入项。在无水流情况下式(45)可写改为

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\nabla\cdot(EC_g\frac{\vec{K}}{k})=S_b+S_{in} \tag{46}$$

式中：$E=\frac{\rho ga^2}{2}=\frac{\rho gH^2}{8}$；$H$ 为波高；$S_b=\frac{1}{2}\rho g\sigma\widetilde{F}_1$，为单位面积单位时间内底摩擦引起的波能损耗；$S_{in}=\frac{1}{2}\rho g\sigma\widetilde{F}_2$，为单位面积单位时间内风传递给波浪的净能量。

无水流时，S_b 可由下式表示

$$S_b=-\frac{1}{T}\int_0^T\tau u_b\mathrm{d}t \tag{47}$$

其中：T 为波周期，u_b 为波动底流速，τ 为底摩擦应力

$$\tau=\rho f_w u_b|u_b| \tag{48}$$

式中：f_w 为底摩擦系数。由(47)、(48)可得

$$S_b=-\frac{4\pi^2}{3}\frac{\rho f_w K^3H^3}{T^3k^3\mathrm{sh}^3kh} \tag{49}$$

式中：$K=|\vec{K}|$。波流共同作用时底摩擦损耗项的近似计算公式可参考 Yoo & O' Connor[20]、洪广文[9]、左其华等[10]的论述。

由于风与波浪间的能量交换机理尚不十分清楚，从理论上推导风能输入项表达式仍存在困难，故本文将根据经验公式和观测结果确定 S_{in}的表达式。在风场中传播的波浪有可能因风能输入而成长，也可能因能量损耗而衰减(如逆风时)，以下从工程应用角度出发，主要考虑风向与波向相差不大且风能输入导致波浪成长的情况。考虑到风浪和涌浪在能量的获取及衰减方面均存在明显差异，对风浪和涌浪的能量输入项采用不同的计算公式。

在风浪情况下，波浪一方面从风场中获得能量，一方面因破碎而导致波能损耗，同时还存在着较强的波一波非线性相互作用。依据实测资料得到的风浪成长经验公式综合了上述各种因素，可用来计算风浪净能量输入 S_{in}，采用已列入交通部"港口工程技术规范"的青岛海洋大学风浪公式[12]

$$\frac{gH_s}{V_{10}^2}=5.5\times10^{-3}(\frac{gX}{V_{10}^2})^{0.35} \tag{50}$$

式中：H_s 为有效波高；V_{10}为海面上 10m 处风速；X 为风区长度。由能量平衡方程式(46)及式(50)可得

$$S_{in}'=0.7gEC_g\left(\frac{5.5\times10^{-3}V^{1.3}}{gH_s}\right)^{\frac{1}{0.35}} \tag{51a}$$

式中：$V=V_{10}\cos\theta$，θ 为波向与风向的夹角。

在涌浪情况下，根据 Snyder 等人的观测结果[22]按下式计算风能净输入

$$S''_{in} = \max\left[0, 0.25\frac{\rho_a}{\rho}k(V - C)E\right] \tag{51b}$$

式中：ρ_a 为空气密度。由于实际海浪可能是介于风浪和涌浪之间的混合浪，在实际应用时可令

$$S_{in} = \alpha S'_{in} + (1 - \alpha)S''_{in} \tag{52}$$

α 为待定系数，其取值可根据实测资料确定。

将计入源函数的缓坡方程虚部式(45)与实部相加后得到考虑底摩擦损耗及风能输入的缓坡方程

$$\frac{D^2\Phi}{Dt^2} + \frac{D\Phi}{Dt}\nabla_h \cdot \vec{U} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + [\sigma^2 - k^2CC_g - gG - i\sigma F]\Phi = 0 \tag{53}$$

式中：$F=F_1+F_2, F_1=-\frac{\widetilde{F}_1}{A}=-\frac{S_b}{E}, F_2=-\frac{\widetilde{F}_2}{A}=-\frac{S_{in}}{E}$。

引入底摩擦项及风能输入项使缓坡方程能够反映海浪与外界的能量交换，从而增强了缓坡方程解决实际问题的能力。

3.2 非线性弥散关系

参照 Kirby & Dalrymple 的近似方法[13]，在缓坡方程中引入非线性项 Γ，将式(53)改写为

$$\frac{D^2\Phi}{Dt^2} + \frac{D\Phi}{Dt}\nabla_h \cdot \vec{U} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + [\sigma^2 - k^2CC_g - gG - i\sigma F]\Phi + \Gamma = 0 \tag{54}$$

式中 σ 为由线性波弥散关系(30)得到的相对角频率。考虑波浪弱非线性时，速度势函数可表示为

$$\Phi = -\frac{iga}{\tilde{\sigma}}e^{iS}, \frac{DS}{Dt} = \tilde{\sigma} \tag{55}$$

$\tilde{\sigma}$ 表示由非线性弥散关系确定的相对角频率。假定水深及流场均匀且 $F=0$，将上式代入式(54)可得

$$\Gamma = \mu\Phi, \mu = (\tilde{\sigma}^2 - \sigma^2) \tag{56}$$

Kirby & Dalrymple 给出 $\tilde{\sigma}$ 的近似表达式[13]

$$\tilde{\sigma}^2 = gk(1 + f_1\varepsilon^2 D)\mathrm{th}(kh + f_2\varepsilon) \tag{57}$$

式中：

$$f_1 = \mathrm{th}^5(kh) \tag{58}$$

$$f_2 = [kh/\mathrm{sh}(kh)]^4 \tag{59}$$

$$D = \frac{\mathrm{ch}(4kh) + 8 - 2\mathrm{th}^2(kh)}{8\mathrm{sh}^4(kh)} \tag{60}$$

至此，得到推广的缓坡方程：

$$\frac{D^2\Phi}{Dt^2} + \frac{D\Phi}{Dt}\nabla_h \cdot \vec{U} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + [\sigma^2 - k^2CC_g - gG + \mu - i\sigma F]\Phi = 0 \tag{61}$$

无水流时上式化为

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla_h \cdot (CC_g \nabla_h \Phi) + [\sigma^2 - k^2CC_g - gG + \mu - i\sigma F]\Phi = 0 \tag{62}$$

4 结 语

本文从流体力学基本方程出发，采用格林公式法推导出一种考虑非均匀水流的推广缓坡方程，在该方程中包含了 $\nabla_h^2 h$ 项和 $(\nabla_h h)^2$，提高了缓坡方程计算沙波等起伏地形上波浪传播的精度。在方程推导过程中，需假定水流的涡量和垂向流速分量为小量，这两项假定明确了非均匀水流缓坡方程的适用范围。文中对非均匀水流缓坡方程作了进一步推广。一是从波能平衡方程出发，在方程中引入底摩擦项和风能输入项，其中风能输入项的推导考虑了风浪与涌浪的区别，风浪情况依据青岛海洋大学的风浪成长经验关系，涌浪情况依据 Snyder 等人的观测结果，对混合浪则采用式(52)计算。二是在方程中引入非线性项，采用 Kirby & Dalrymple 提出的非线性弥散关系式，使方程可用于波浪具有弱非线性的场合。经过上述推广后，得到综合考虑折射、绕射、反射底摩擦损耗、风能输入及波浪非线性的推广缓坡方程。由于综合考虑了多种实际因素，本文方程能更好的模拟海岸工程中复杂的波浪传播变形现象。

应当看到，推广的缓坡方程中底摩擦项、风能输入项以及非线性项均带有经验性，在今后工作中有待从理论上进一步完善。本文推广的缓坡方程是针对单一频率的波浪导出的，计算不规则波时，可将其直接应用

于不规则波的特征波要素,也可将其应用于各组成波,按组成波叠加法计算合成波要素。采用后一种方法时需对不规则波条件下底摩擦项、风能输入项和非线性项的计算作进一步研究。

参考文献:

[1] Berkhoff J C W. Computation of combined refraction-difraction [A]. In:Proc. 13th Coastal Eng. Conf [C]. ASCE. 1972. 471-490.

[2] Simith R, Sprinks T. Scattering of surface waves by a conical island [J]. J. Fluid Mech., 1975, 72(4):373-384.

[3] Booij N. Gravity waves on water with non-uniform depth and current [R]. Rep. 81-1, Dept. Civil Eng. Delft Univ. of Technolgy, 1981.

[4] Dalrymple R A, Kirby J T, Hwang P A. Wave diffraction due to areas of energy dissipation [J]. ASCE J. Waterway Port Coastal Ocean Eng., 1984, 110(1):67-79.

[5] 左其华,姚国权,丁炳灿. 摩阻地形上的波浪折射和绕射[J]. 港口工程,1993,(1):1-7.

[6] 洪广文. 波浪折射、绕射数学模型[A]. 第七届全国海岸工程学术讨论会论文集(下)[C]. 北京:海洋出版社. 1994,808-815.

[7] Liu P L-F. Wave-current interactions on a slowly varying topography [J]. J. Geophys. Res., 1983, 88(c7):4421-4426.

[8] Kirby J T. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography [J]. J. Geophys. Res., 1984, 89(cl):745-747.

[9] 洪广文. 非均匀水流中波浪折射-绕射数学模型[A]. 第十七届海洋工程研讨会暨1995两岸港口及海岸开发研讨会论文集[C]. 1995,81-95.

[10] 左其华,王红川,潘军宁. 波-流在摩阻地形上的综合传播[J]. 水利水运科学研究,1998,4:299-309.

[11] Hedges T S. An empirical modification to linear wave theory [A]. Proc. Inst. Civ. Eng. [C]. 1976, 61:575-579.

[12] Kirby J T, Dolrymple R A. A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of stokes waves by mildly varying toporgaphys[J]. J. Fluid Mech., 1983, 163:453-466.

[13] Kirby J T, Dalrymple R A. An approximate model for nonlinear dispersion in monochromatc wave propagation models [J]. Coastal Eng., 1986, (9):545-561.

[14] Kirby J T. A general wave equation for waves over ripple beds [J]. Fluid Mech., 1986, 162:171-186.

[15] Massel S R. Extended refraction-diffraction equation for surface waves [J]. Coastal Eng., 1993, 19:97-126.

[16] Chamberlain P G, Porter D. The modified mild-slope equation [J]. J. Fluid Mech., 1995, 291:393-407.

[17] Zhang Libang, Edge Billy L. A uniform mild-slope model fof waves over varying bottonm [A]. Pro. of 25th Coastal Eng., Conf [C]. ASCE, 1996. 1:941-954.

[18] Chandrasekera C N, Cheung K F. Extended linear refraction-diffraction model [J]. ASCE J. Waterway Port Coastal Ocean Eng, 1997, 123(5):280-286.

[19] Booij N. A note on the accuracy of the mild-lope equation [J]. Coastal Eng., 1983, 7:191-203.

[20] Yoo D, O'Connor B A. Bed friction model of wave-current interqcted flow [J]. Coastal Hydrodynamics. 1998, 93-106.

[21] Wen Sheng-chang, *et al*. A hybrid model for numerical wave forecasting and its implemetation-1:The wind wave model [J]. Acta Oceanologica Sinical, 1989, 8(1):1-14.

[22] Snyder R L, Dobson F W, Elliott J A, *et al*. Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves[J]. J. Fluid Mech., 1981, 102:1-59.