

# 最大熵原理应用于海浪波高分布的研究

周良明, 郭佩芳

(中国海洋大学 海洋环境学院, 山东 青岛 266003)

**摘要:**利用最大熵原理从理论上推导出波高的最大熵分布,在此基础上研究了状态参量对波高分布和波高熵的影响。影响最大熵分布的因子是平均波高和状态参量,不同海况对应的状态参量是不同的。利用波高实测资料,得出 3 种不同海况下的最大熵分布,通过比较发现最大熵分布很好地符合实测数据。把最大熵分布与目前广泛应用的瑞利分布作了比较,结果表明,最大熵分布有 2 个优点:没有对波高作出任何限制性假定和能够描述不同海况下的波高分布。

**关键词:**信息熵;波高熵;最大熵原理;最大熵分布;瑞利分布

**中图分类号:**P731.22

**文献标识码:**A

**文章编号:**1671-6647(2005)04-0414-08

熵最早是由 Clausius 于 1865 年提出并应用于热力学的态函数,后来它又被应用于统计物理学中,随着信息熵概念的提出,熵在整个领域得到推广、应用和深入研究。人们称熵是一种新的世界观,正像爱因斯坦所说:“熵理论,对于整个科学来说是第一法则”。

1948 年,Shannon 从全新的角度上提出了信息熵的概念:

$$s = - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \quad (1)$$

式中,  $p_i$  是信息源中第  $i$  种信号出现的概率;  $\ln p_i$  是它带来的信息量;  $s$  表征了信息量的大小,是一个系统状态不确定的量度,即一个随机事件不确定程度的量度。

我们可以从 2 个不同的角度来看式(1):一方面,如果我们知道信息出现的概率,那么就可以根据式(1)来求熵值;另一方面,更有意义的是,我们可以把  $s$  看成分布几率  $p_i$  的泛函数,即当  $p_i$  发生变化时,  $s$  也随着相应地改变。所以在给定的条件下,在所有可能的概率分布中,存在一个使信息熵取极大值的分布<sup>[1]</sup>,即在所有符合约束条件的分布中,这一分布是“最佳的”分布,我们称之为最大熵分布。

波高的瑞利分布最早是由 Longuet-Higgins<sup>[2]</sup>(1952)导出的。后来又有许多科学家提出多种推导方法,得到的结果都是一致的。Rayleigh 分布经大量数据验证,在一般情况下大体符合深水海浪的实际情况。如果波面位移是非正态的,波高分布一般为非 Rayleigh 分布。Tayfun(1980)<sup>[3]</sup>证明,对于窄谱海浪,即使波面位移为非正态分布,波高也近似服从 Rayleigh 分布。

瑞利分布的最大局限性在于它假定海浪是窄谱的且波面位移服从正态分布。下面我们将在无任何假定的基础上利用最大熵原理求出波高的最大熵分布。

## 1 利用最大波高熵原理推导波高的最大熵分布

设海面波高  $H$  的概率密度函数为  $f(H)$ ,则波高熵的定义为:

$$s = - \int_0^{\infty} f(H) \ln f(H) dH \quad (2)$$

收稿日期:2004-12-10

作者简介:周良明(1976-),男,山东莱阳人,博士,主要从事海浪和海洋遥感研究。E-mail:zhou5299@ouc.edu.cn

(武建平 编辑)

波高熵是波高大小不确定性的量度,是表征波高分布的特征量。

波高分布的归一化条件为:

$$\int_0^{\infty} f(H) dH = 1 \quad (3)$$

对于波高分布,我们取以下 2 个约束条件:

$$\int_0^{\infty} Hf(H) dH = \bar{H} \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} \ln Hf(H) dH = \overline{\ln H} \quad (5)$$

引入拉格朗日函数:

$$L = - \int_0^{\infty} [f(H) \ln f(H) + \alpha f(H) + \beta Hf(H) - \gamma f(H) \ln H] dH \quad (6)$$

式中,  $\alpha, \beta, \gamma$  分别为未定乘子。要使熵取得最大值,根据哈密顿原理,拉格朗日函数的变分为零,即:

$$\delta L = 0 \quad (7)$$

$$\delta L = - \int_0^{\infty} \delta f(H) [\ln f(H) + \alpha + \beta H - \gamma \ln H] dH = 0 \quad (8)$$

因为

$$\delta f(H) \neq 0 \quad (9)$$

所以

$$\ln f(H) + \alpha + \beta H - \gamma \ln H = 0 \quad (10)$$

这样,与最大波高熵对应的的密度函数为:

$$f(H) = e^{-\alpha - \beta H + \gamma \ln H} \quad (11)$$

把式(11)代入式(3),得到:

$$e^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-\beta H + \gamma \ln H} dH = \int_0^{\infty} e^{-\beta H} H^{\gamma} dH \quad (12)$$

令

$$\beta H = h \quad (13)$$

代入式(12),得到:

$$e^{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-h} h^{\gamma} \beta^{-\gamma+1} dh = \beta^{-(\gamma+1)} \Gamma(\gamma+1) \quad (14)$$

将式(14)代入式(11),得到:

$$f(H) = \frac{\beta^{(\gamma+1)}}{\Gamma(\gamma+1)} H^{\gamma} e^{-\beta H} \quad (15)$$

式(15)中包含  $\beta$  和  $\gamma$  两个参量,下面我们将进一步探讨它们的关系。对式(12)和(14)两边分别求  $\beta$  的偏导数:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = - \int_0^{\infty} H e^{-\alpha - \beta H} H^{\gamma} dH = - \bar{H} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = - \frac{\gamma+1}{\beta} \quad (17)$$

结合以上两式,得到:

$$\bar{H} = \frac{\gamma+1}{\beta} \quad (18)$$

将式(18)代入式(15),得到:

$$f(H) = \frac{(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}{\Gamma(\gamma+1)} \left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^\gamma \frac{1}{\bar{H}} e^{-(\gamma+1)\frac{H}{\bar{H}}} \quad (19)$$

取无因次波高:

$$\tilde{H} = \frac{H}{\bar{H}} \quad (20)$$

并令:

$$f(\tilde{H}) = \bar{H} f(H) \quad (21)$$

得到式(19)的无因次形式:

$$f(\tilde{H}) = \frac{(\gamma+1)^{(\gamma+1)}}{\Gamma(\gamma+1)} \tilde{H}^\gamma e^{-(\gamma+1)\tilde{H}} \quad (22)$$

与式(19)对应的分布函数为:

$$F(H) = 1 - \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^{\frac{H}{\bar{H}}} e^{-H} H^\gamma dH \quad (23)$$

式(19)和(23)是与最大波高熵对应的密度函数和分布函数,我们称之为最大熵分布,其中  $\gamma$  是表征不同海况的参数,我们称之为状态参量。

## 2 状态参量对最大熵分布及波高熵的影响

图 1 反映了最大熵分布随状态参量的变化情况,其中曲线 1,2,3,4 和 5 的状态参量分别为 0,0.3,0.6,2 和 4。状态参量在由 0 增加到 0.6 的过程中,最大熵分布的概率密度峰值减小,与之对应的无因次波高增加;状态参量由 0.6 增加到 4 过程中,最大熵分布的概率密度峰值增加,与之对应的无因次波高也增加。

把式(19)代入式(2),得到波高熵:

$$s = 1 + \ln\left[\frac{\Gamma(\gamma+1)\bar{H}}{(\gamma+1)}\right] + \lambda\left[\frac{\Gamma'(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1)}\right] \quad (24)$$

从式(24)中可见,影响波高熵的因素包括状态参量  $\gamma$  和平均波高。

图 2 和图 3 为波高熵随平均波高和状态参量  $\gamma$  的变化曲线。由图 3 可见,平均波高不变时,状态参量越大,波高熵越大。对此,我们给出从下物理解释:把  $\gamma$  看作描述海况复杂程度的一个参量,对于给定的波高, $\gamma$  越大,海况的复杂程度越大。同时由图 2 也可见,对于给定的参量  $\gamma$ ,波高熵随着波高的增大而增加。我们很容易理解这一现象,因为对于复杂程度相同的海况,大波出现的不确定性一定大于小波出现的不确定性。

图 4 描述了波高熵随平均波高和状态参量的联合变化规律,即波高熵随着平均波高和状态参量的增大而增大。

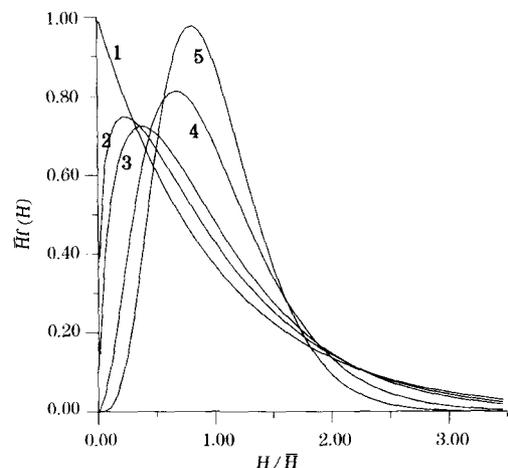


图 1 最大熵分布随状态参量的变化曲线  
Fig. 1 Five curves of  $\bar{H}f(H)$  for different  $\gamma$ s

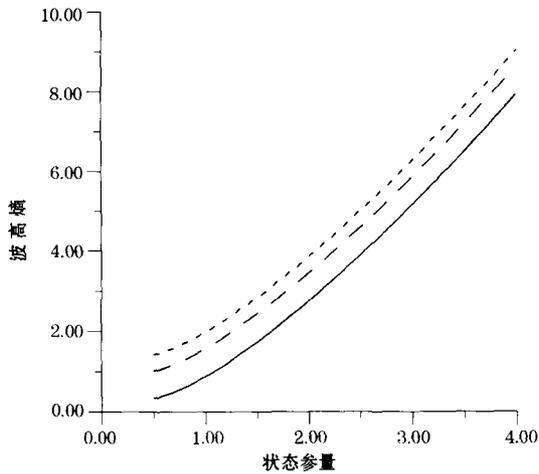


图 2 波高熵随状态参数的变化曲线

(短虚线、长虚线和实线对应的平均波高分别为 1, 2 和 3 m)

Fig. 2 Variations of  $s$  with different  $\gamma$ s

(The short dashed, long dashed and solid lines correspond to  $\bar{H}=1$  m, 2 m and 3 m, respectively)

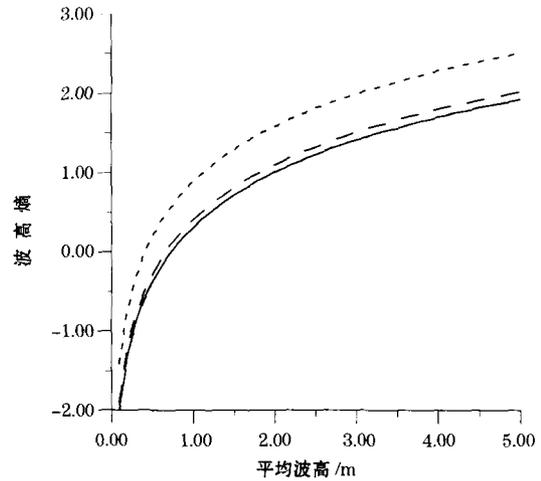


图 3 波高熵随平均波高的变化曲线

(短虚线、长虚线和实线对应的状态参数分别为 0.3, 0.6, 1)

Fig. 3 Variations of  $s$  with different  $\bar{H}$ s

(The short dashed, long dashed and solid lines correspond to  $\gamma=0.3, 0.6$  and 1, respectively)

### 3 利用实测资料确定状态参数

下面我们利用最小二乘法对实测数据进行回归分析, 从而确定状态参数  $\gamma$ 。对式(11)我们引进变量变换:

$$\left. \begin{aligned} y &= \ln[f(H)] \\ x_1 &= H \\ x_2 &= \ln H \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

则式(11)变为:

$$y = -\alpha - \beta x_1 + \gamma x_2 \quad (26)$$

对于波高观测, 可以得到  $N$  组观测数据:

$$(x_{1n}, x_{2n}; y_n), n = 1, 2, \dots, N \quad (27)$$

这样, 我们就得到问题的线性回归方程:

$$y_n = -\alpha - \beta x_{1n} + \gamma x_{2n}, n = 1, 2, \dots, N \quad (28)$$

我们要解决的问题是给出回归系数  $-\alpha, -\beta, \gamma$  的最小二乘估计  $a, b, c$ 。经过计算得到:

$$c = \frac{\sum_n (x_{1n} - \bar{x}_1)(y_n - \bar{y}) \sum_n (x_{1n} - \bar{x}_1)(x_{2n} - \bar{x}_2) - \sum_n (x_{2n} - \bar{x}_2)(y_n - \bar{y}) \sum_n (x_{1n} - \bar{x}_1)^2}{[\sum_n (x_{1n} - \bar{x}_1)(x_{2n} - \bar{x}_2)]^2 - \sum_n (x_{1n} - \bar{x}_1)^2 \sum_n (x_{2n} - \bar{x}_2)^2} \quad (29)$$

对该问题, 有:

$$c = \frac{\sum_n (H_n - \bar{H})(\ln f(H_n) - \overline{\ln f(H)}) \sum_n (H_n - \bar{H})(\ln H_n - \overline{\ln H})}{[\sum_n (H_n - \bar{H})(\ln H_n - \overline{\ln H})]^2 - \sum_n (H_n - \bar{H})^2 \sum_n (\ln H_n - \overline{\ln H})^2} - \frac{\sum_n (\ln H_n - \overline{\ln H})(\ln f(H_n) - \overline{\ln f(H)}) \sum_n (H_n - \bar{H})^2}{[\sum_n (H_n - \bar{H})(\ln H_n - \overline{\ln H})]^2 - \sum_n (H_n - \bar{H})^2 \sum_n (\ln H_n - \overline{\ln H})^2} \quad (30)$$

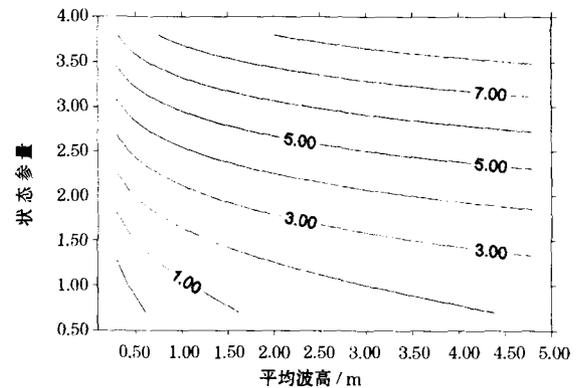


图 4 波高熵随平均波高和状态参数的联合变化曲线

Fig. 4 Variations of  $s$  with  $\bar{H}$  and  $\gamma$

我们选取 2000 年 10 月在中国东海 3 个测量点观测到的随时间变化的海浪波面记录,其中每段资料的海况情况变化不大。3 个测量点的详细情况见表 1。

表 1 A,B,C 站的测量状况

Table 1 Conditions at stations A,B and C during the surveys

项 目	A 站	B 站	C 站
测量日期	2000 年 10 月 23 日 12:00—22:00	2000 年 10 月 29 日 12:00—23:00	2000 年 10 月 28 日 11:00—23:00
地理位置	29°39.77'N,122°49.37'E	29°39.73'N,123°29.24'E	29°39'N,122°41'E
深度/m	49	65	75
平均波高/m	0.516	1.101	0.749
平均周期/s	3.232	5.253	8.760
海面上 10m 处风速/m·s <sup>-1</sup>	10.14	9.48	7.92
海浪状态	以风浪为主	混合浪	以涌浪为主
状态参量	1.229	1.035	0.267

对于海浪波面记录,定义波高有 2 种方法,第一种是将波高定义为相邻的峰、谷间的高度差;第二种定义为上跨零点一侧的显著波谷与另一侧的显著波峰间的高度差。第一种方法定义的波高实际上是波面极大值的 2 倍,波面极大值波高的概率分布适用于不同的谱宽度参量,因此在理论探讨上是方便的,但在工程、预报等应用问题中,通常采用跨零法。跨零法有上跨零点和下跨零点之分,本文中我们采用上跨零点法定义波高。

将 3 个站的数据代入到式(30)中进行计算后,得到 3 个不同的状态参量(表 1)。由表 1 可见,不同的海况对应着不同的状态参量:混合浪为主的海况(B 站)对应的状态参量小于以风浪为主的海况(A 站),但大于以涌浪为主的海况(C 站)。以风浪为主的海况复杂程度最大,故状态参量最大,而以涌浪为主的海况复杂程度最小,故状态参量最小。

将 3 个状态参量分别代入式(19)得到 A,B,C 站的最大熵分布概率密度函数(图 5)。

将 A,B,C 站的实测资料分别与式(19)所表示的最大熵分布概率密度函数做比较,结果如表 2 所示。由表 2 可见,两者符合得比较好。图 6 为 A 站的最大熵分布概率密度函数与实测资料的比较,图 7 为 A 站的最大熵累积概率分布函数与实测资料的比较。

表 2 A,B,C 站实测资料与最大熵分布概率密度函数的比较

Table 2 Comparison between the observed data and maximum entropy distribution PDFs for stations A,B and C

站号	相关系数	相对误差/%
A	0.932	4.5
B	0.920	4.3
C	0.945	3.9

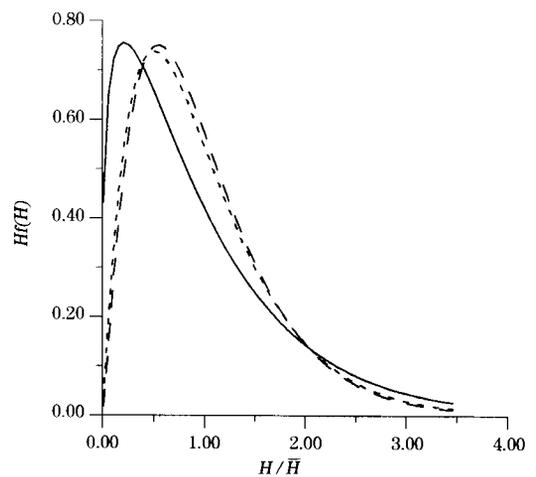


图 5 A,B,C 站的最大熵分布的概率密度函数曲线 (长虚线为 A 站;短虚线为 B 站;实线为 C 站)

Fig. 5 Probability density function(PDF) curves of maximum entropy distribution for stations A, B and C (The long dashed, short dashed and solid lines correspond to the curves for stations A, B and C, respectively)

#### 4 最大熵分布与瑞利分布的比较

对于瑞利分布,概率密度极大值为:

$$f_{\max}(\tilde{H}) = 0.76 \quad (28)$$

对应的波高为:

$$H_m = 0.8\bar{H} \quad (29)$$

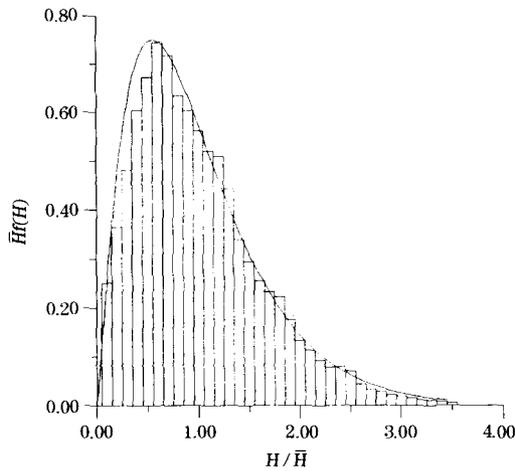


图 6 A 站的最大熵分布概率密度函数与实测资料的比较 (实线为最大熵分布概率密度函数,柱形图为实测资料)  
Fig. 6 Comparison of the maximum entropy distribution PDF of wave height at station A with the observed data. (The histogram is the observed data and the solid line is given by the maximum entropy distribution PDF)

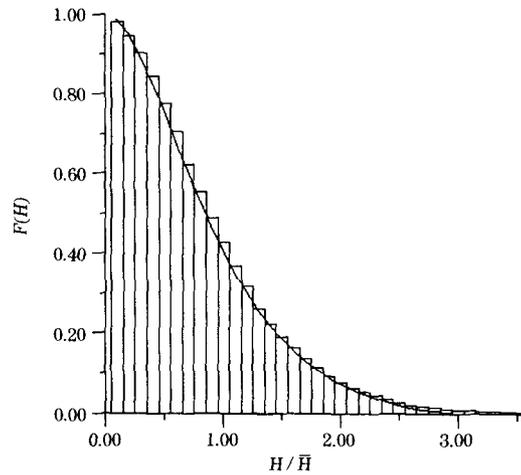


图 7 A 站的最大熵累积概率分布函数与实测资料的比较 (实线为最大熵累积概率分布函数,柱形图为实测资料)  
Fig. 7 Comparison of the maximum entropy cumulative-probability distribution function for station A with the observed data (The histogram is the observed data and the solid line is the maximum entropy cumulative-probability distribution function)

对最大熵分布,当状态参量  $\gamma=3.5$  时,概率密度取极大值,对应的无因次波高也为 0.8(图 8),但最大熵分布的概率密度极大值为:

$$f_{\max}(\tilde{H}) = 0.96 \tag{30}$$

当状态参量  $\gamma=1.3$  时,2 种分布有相同的概率密度极值 0.76(图 9),与此极值对应的最大熵分布的无因次波高为 0.58,小于瑞利分布的 0.8。

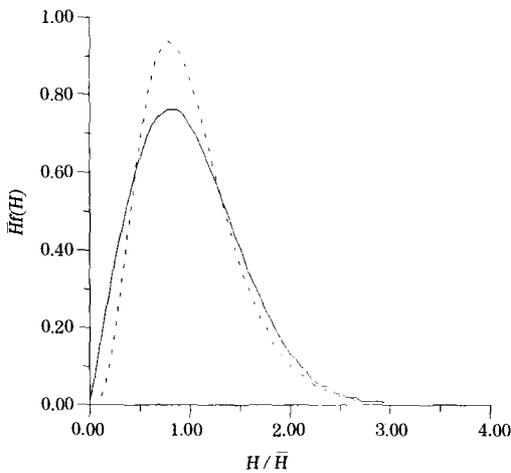


图 8 最大熵分布与瑞利分布概率密度函数的最大概率无因次波高相同( $\gamma=3.5$ )(虚线表示最大熵分布,实线表示 Rayleigh 分布)  
Fig. 8 The most possible value of  $H/\bar{H}$  for  $\gamma=3.5$  predicted by the maximum entropy distribution PDF is identical to that predicted by Rayleigh distribution PDF (The dashed line denotes Rayleigh distribution PDF and the solid line denotes the maximum entropy distribution PDF)

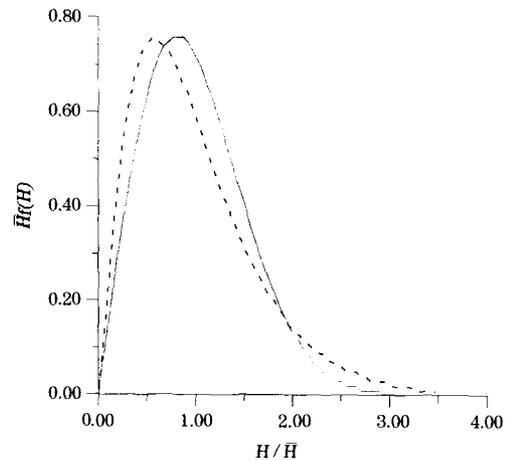


图 9 最大熵分布与瑞利分布概率密度函数的概率密度极值相同( $\gamma=1.3$ )(虚线表示最大熵分布,实线表示 Rayleigh 分布)  
Fig. 9 The maximum probability densities predicted by maximum entropy distribution PDF for  $\gamma=1.3$  and by Rayleigh distribution PDF are equal to each other (The dashed line denotes Rayleigh distribution PDF and the solid line denotes the maximum entropy distribution PDF)

将 A, B, C 站的所有资料代入式 (30), 得到对应的状态参量  $\gamma=0.9$ , 然后代入式 (19) 得到最大熵分布。图 10 为最大熵分布、瑞利分布与实测数据(A, B, C 站)的比较。20 世纪 70 年代以后, 部分学者得到的结果表明, 由瑞利分布给出的不小于某一给定波高的概率偏大, 对于小的概率差异更明显<sup>[4]</sup>, 其原因在于瑞利分布所做的窄谱和正态分布的假设。由图 10 可见, 与瑞利分布相比, 最大熵分布更适配实测数据, 尤其对小累积率波高(大波高), 而在航海和海洋工程界中人们往往更关心大波高。

## 5 结 论

最大熵分布是从理论上导出的半理论半经验公式, 函数中的状态参量是与一定的海(浪)况相对应的, 且可以通过实测数据确定。因此, 与瑞利分布相比, 最大熵分布更能反映不同海况的波高分布。

最后需要指出, 本文更重要的意义在于从全新的角度提出了一种研究波高分布的新方法, 这对于研究波高的统计分布是一个很好的尝试, 对海洋的研究无疑将起到很大的推进作用。

### 参考文献(References):

- [1] Miu S Q. Maximum information entropy principle and its application to statistical mechanics[A]. Entropy and Interdisciplinary Science [C]. Beijing: Meteorology Press, 1988. 30-35. 缪胜清. 最大信息熵原理及其对统计力学的应用[A]. 熵与交叉科学[C]. 北京: 气象出版社, 1988. 30-35.
- [2] Longuet-Higgins M S. On the statistical distribution of the height of sea waves[J], *J. Mar. Res.*, 1952, **11**(3): 245-266.
- [3] Tayfun M A. Narrow-band nonlinear sea waves[J], *J. Geophys. Res.*, 1980, **78**(12): 1937-1943.
- [4] Wen S C and Yu Z W. Theory and Computational Principle of Ocean Waves[M]. Beijing: Science Press, 1985. 文圣常, 余宙文. 海浪理论与计算原理[M]. 北京: 科学出版社, 1985.
- [5] Xu D L and Yu D Y. Theory of Random Ocean Waves[M], Beijing: Higher Education Publishing House, 2001. 徐德伦, 于定勇. 随机海浪理论, 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [6] Li Y Z and Cong S Z. Entropy and its application in hydrographic frequency computation[A]. Entropy and Interdisciplinary Science [C]. Beijing: Meteorology Press, 1988. 139-145. 李元章, 丛树铮. 熵及其在水文频率计算中的应用[A]. 熵与交叉科学[C]. 北京: 气象出版社, 1988. 139-145.
- [7] Jowit P W. The extreme-value type-1 distribution and principle of maximum entropy[J]. *Journal of Hydrology*, 1979, **62**: 23-38.
- [8] Edwit T J. Prior probabilities[J]. *IEEE Transactions on System Science and Cybernetics*, 1986, SSC-4.

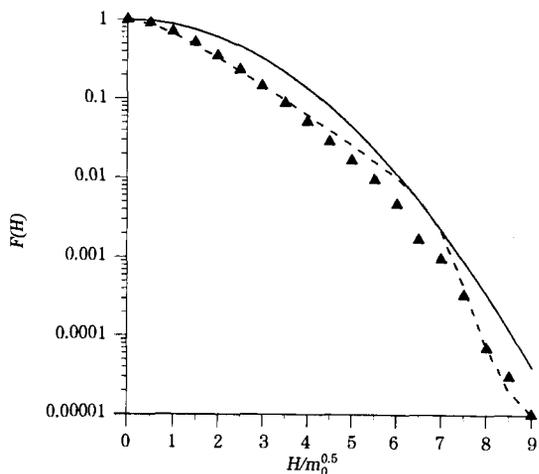


图 10 最大熵分布、瑞利分布的波高累积率与实测数据的比较 (实线为 Rayleigh 分布, 虚线为最大熵分布, 三角线为实测数据)

Fig. 10 Comparison between wave height accumulative probabilities of the maximum entropy and Rayleigh distributions and the observed data (The solid line denotes Rayleigh accumulative probability distribution, the dashed line denotes the maximum entropy accumulative probability distribution for  $\gamma=1.229$ , and the delta line denotes the accumulative probability distribution of the observed data.)

## Application of Maximum Entropy Principle in Studying Wave Height Distribution

ZHOU Liang-ming, GUO Pei-fang

(College of Marine Environment, Ocean University of China, Qingdao 266003, China)

**Abstract:** In this paper, the maximum entropy principle is used to derive the maximum entropy distribution of wave height, and the effects of state parameter on the wave height distribution and wave height entropy are then studied. The factors affecting the maximum entropy distribution are average wave height and state parameter, and different sea states correspond different state parameters. The observed wave height data were used to obtain the maximum entropy distributions under 3 different sea states, and it is shown from the comparison results that the maximum entropy distributions are well consistent with the observed data. The comparison between the maximum entropy distribution and the widely used Rayleigh distribution was made, and it is shown from the comparison results that the maximum entropy distribution has two advantages, namely, no restrictive assumption on wave height is made and the distribution can describe the wave height distributions under different sea states.

**Key words:** information entropy; wave height entropy; maximum entropy principle; maximum entropy distribution; Rayleigh distribution

**Received:** December 10, 2004

简 讯:

### 《海洋科学进展》2004 年期刊影响因子发布

根据中国科技信息研究所和万方数据资源系统 2005 年 9 月共同出版的《中国期刊引证研究报告》(2003—2004)统计结果,《海洋科学进展》杂志 2004 年期刊影响因子为 0.423,比 2003 年的 0.304 上升了 0.119,在所统计的全国 24 个海洋学类期刊中排名第 10 位。

多年来,在主办单位中国海洋学会领导和广大海洋科技工作者的大力支持下,《海洋科学进展》杂志坚持科学、严谨的态度,以发表具有科学性、创新性和实用性的高水平学术成果为己任,期刊的国内外学术影响力不断提高。作为中国海洋学会主办的三个学报级学术期刊之一,《海洋科学进展》已被评定为北京大学图书馆《中文核心期刊要目总览》“中文核心期刊”(2004 年版)、科技部“中国科技核心期刊”和“中国自然科学核心期刊”,在国际上被美国、俄罗斯、英国等多个权威性检索系统收录。

《海洋科学进展》杂志将一如既往,为办出最具影响力的海洋科技期刊而不懈努力。欢迎广大海洋科技工作者踊跃投稿和订阅。

(本 刊)